

# 都市防災工学

## 第8回：確率論的地震動評価

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース

岡野 創

<http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html>

## 講義予定

1. 導入・確率過程の基礎：2020年11月25日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2020年12月2日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2020年12月9日
4. 入力エネルギー：2020年12月16日
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年12月23日
6. ランダムウォークと残留変形：2021年1月6日
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性：2021年1月20日
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2021年1月27日

1

## 確率論的地震動評価（地震危険度解析）とは？

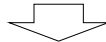
### ◆ 国の地震動予測：地震予知 → 確率的地震動予測

#### ◇ 地震予知

- 「場所」、「大きさ」、「時期」の3要素を、ある程度狭い範囲で事前に指定することが必要
- 前兆と思われる現象も、地震発生前に前兆である可能性が高いと広く認められた例はほとんどないとされる

#### ◇ 確率論的地震動予測

- 地震のマグニチュードと発生回数の経験則や、断層の活動履歴などに基づいて、長期的な地震動強さの発生確率を予測
- 国の地震調査推進本部（現地震本部）も、2001年以降、長期的な確率予測を主とするようになった



### ◆ 地震のマグニチュードと発生回数の経験則から、地震動の強さの超過確率を算出する基礎理論を解説

2

## 地震のマグニチュードと発生回数

### ◆ グーテンベルグ・リヒター式

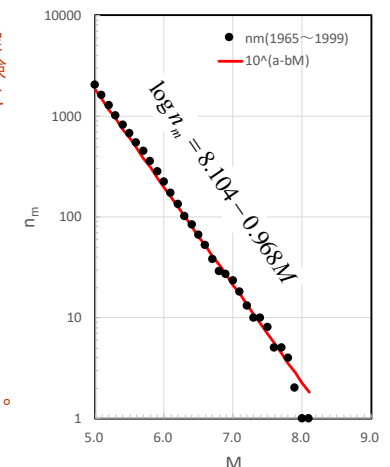
- ◇ ある地域でマグニチュード $M$ の地震が発生する回数を $n_m$ とすると、経験的に以下のような関係が成り立つことが知られている。

$$\log n_m = a - b \cdot M \quad (8.1)$$

- ◇  $a$ 値は地震活動度を表すものと考えられ、地域によって異なる。
- ◇  $b$ 値にも地域性があるとされているが、広域でみると1前後の値になることが多い。
- ◇ 式(8.1)を書き直すと、次のようになる。

$$n_m = \quad (8.2)$$

( $b$ が1前後なので、マグニチュードが1増えると、発生回数はほぼ1/10になる)



日本付近の浅発地震 (宇津,p.144よりプロット) 3

## マグニチュードの累積確率分布

マグニチュードが $m$ 以下となる確率は、次式で与えられる。

$$F_M(m) = \underbrace{\Pr(M < m)}_{\substack{\text{確率変数}M\text{が}m \\ \text{以下になる確率}}} = \quad (8.3)$$

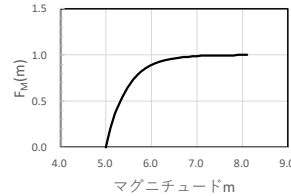
積分の便を考えると式(8.2)を、次のように書き直す。

$$n_m = \quad (8.4)$$

式(8.3)に代入すると、

$$F_M(m) = \frac{\int_{m_0}^m e^{(a-b \cdot m) \ln 10} dm}{\int_{m_0}^{\infty} e^{(a-b \cdot m) \ln 10} dm} = \frac{[e^{-mb \ln 10}]_{m_0}^m}{[e^{-mb \ln 10}]_{m_0}^{\infty}} = 1 - e^{-\beta(m-m_0)} \quad (8.5)$$

ここで、 $\beta = b \ln 10$ である。



4

## マグニチュードと地震動の強さ

マグニチュード $M$ と地震動強さ $Y$ の関係は、距離減衰式と呼ばれる経験式により、以下のように関係づけられる。

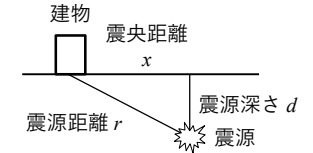
$$Y = b_1 e^{b_2 M} R^{-b_3} \quad (8.6)$$

$Y$ は $PGA, PGV$ などの地動最大振幅でも $S_a$ などの応答スペクトルでも良く、多くの提案式がある。式(8.6)を $M$ について書き直すと、

$$M = \frac{1}{b_2} \ln \left( \frac{Y \cdot R^{b_3}}{b_1} \right) \quad (8.6)'$$

地震動の強さ $Y$ が $y$ を超える確率は、震源距離 $r$ が既知という条件付きで、次式のようにマグニチュード $M$ の超過確率に置き換えることができる。

$$\Pr[Y > y | R = r] = \Pr[b_1 e^{b_2 M} r^{-b_3} > y] = \Pr \left[ M > \frac{1}{b_2} \ln \frac{y \cdot r^{b_3}}{b_1} \right] \quad (8.7)$$



5

## 地震動強さの（震源距離の条件付き）超過確率

式(8.5)より、マグニチュードの超過確率は、

$$\Pr[M > m] = 1 - F_M(m) = \exp[-\beta(m - m_0)] \quad (8.8)$$

式(8.7),(8.8)より、震源距離が $r$ の条件付きの地震動強さ $Y$ の超過確率は、

$$\begin{aligned} \Pr[Y > y | R = r] &= \Pr \left[ M > \frac{1}{b_2} \ln \frac{y \cdot r^{b_3}}{b_1} \right] \leftarrow (8.7) \\ &= \exp \left[ -\beta \left( \frac{1}{b_2} \ln \frac{y \cdot r^{b_3}}{b_1} - m_0 \right) \right] \leftarrow (8.8) \\ &= e^{\beta m_0} \exp \left[ \frac{\beta}{b_2} (-\ln y + \ln b_1 - \ln r^{b_3}) \right] \\ &= e^{\beta m_0} y^{-\frac{\beta}{b_2}} \frac{\beta}{b_2} \frac{\beta b_3}{b_2} r^{-\frac{\beta b_3}{b_2}} \end{aligned} \quad (8.9)$$

6

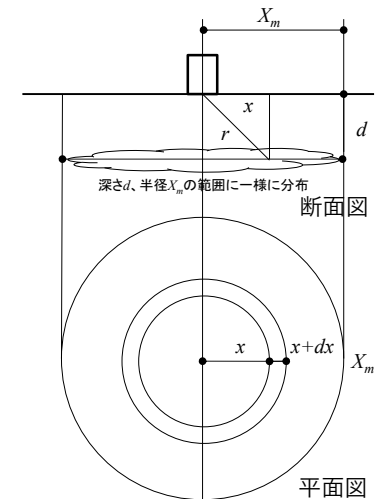
## 震源距離の確率分布（1）

震源深さを確定値（本当は確率変数）とすると、震源の空間分布を考慮した地震動強さの超過確率は、以下のように与えられる。

$$\Pr[Y \geq y] = \int \Pr[Y \geq y | R = r] f_r(r) dr \quad (8.10)$$

深さ $d$ 、半径 $X_m$ の範囲に一様に分布すると仮定すれば、震央距離 $X$ の確率密度は、

$$f_X(x) = \quad (8.11)$$



7

## 震源の空間分布を考慮する (2)

震央距離の確率密度を震源距離の確率密度に変換する。

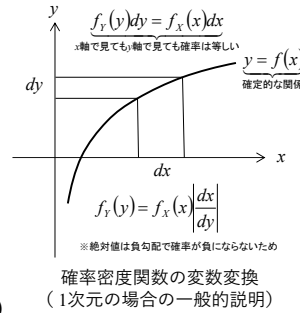
$$f_R(r) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dr} \right| \quad (8.12)$$

以下の関係より、

$$r = \sqrt{x^2 + d^2} \quad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \quad (8.13)$$

以下の関係より、

$$f_R(r) = \quad (8.14)$$



8

## 震源の空間分布を考慮する (3)

式(8.9),(8.10),(8.14)より、

$$\Pr[Y > y] = \int_d^{r_m} e^{\beta m_0} y^{-\frac{\beta}{b_2}} b_1^{-\frac{\beta}{b_2}} r^{-\frac{\beta b_3}{b_2}} \frac{2r}{X_m^2} dr \quad (8.15)$$

これを整理して、

$$\begin{aligned} \Pr[Y > y] &= \frac{2e^{\beta m_0} y^{-\frac{\beta}{b_2}} b_1^{-\frac{\beta}{b_2}}}{X_m^2} \int_d^{r_m} r^{-\frac{\beta b_3}{b_2} + 1} dr \\ &= \frac{2e^{\beta m_0} y^{-\frac{\beta}{b_2}} b_1^{-\frac{\beta}{b_2}}}{X_m^2} \left[ \frac{r^{-\beta b_3/b_2 + 2}}{-\beta b_3/b_2 + 2} \right]_d^{r_m} \\ &= \frac{2e^{\beta m_0} y^{-\frac{\beta}{b_2}} b_1^{-\frac{\beta}{b_2}}}{X_m^2} \frac{(r_m^{-q} - d^{-q})}{-q} \quad q = \frac{\beta b_3}{b_2} - 2 \end{aligned}$$

9

## 地震動の超過確率

以上を整理して、地震動強さの超過確率が次のように得られる。

$$P_Y = \Pr[Y > y] = C \cdot y^{-\frac{\beta}{b_2}} \quad (8.16)$$

$$\begin{cases} C = \frac{2e^{\beta m_0} b_1^{-\frac{\beta}{b_2}}}{q X_m^2} (d^{-q} - r_m^{-q}) \\ q = \frac{\beta b_3}{b_2} - 2 \end{cases}$$

式(8.16)は、 $m_0$ 以上の地震が発生したという条件付きで、マグニチュードの確率分布と、震源の空間分布を考慮した地震動強さの超過確率である。

10

## $m_0$ 以上の地震の発生確率の考慮

次に、想定している半径 $r_m$ の範囲で、1年間に $m \geq m_0$ の地震が起こる確率を考える。地震の発生をポアソン過程と仮定し※、1年間の発生確率を $\nu$ とすると $t$ 年間で $n$ 回発生する確率は、

$$\Pr[N_{m \geq m_0} = n] = \frac{(\nu t)^n}{n!} e^{-\nu t} \quad (8.17)$$

$t$ 年間で、地震動強さ $Y$ が $y$ を超える回数 $N$ は、

$$\Pr[N = n] = \quad (8.18)$$

$t$ 年間で、地震動強さの最大値 $Y_{max}$ が $y$ 以下である確率は、上式で $n=0$ とにおいて、

$$\Pr[Y_{max} < y] = \quad (8.19)$$

と与えられる。式(8.19)では $n=0$ とおいたことにより、非超過確率になっていることに注意する。

※ この仮定は常に成立するわけではない

11

## 期間 $t$ の地震動の非超過確率

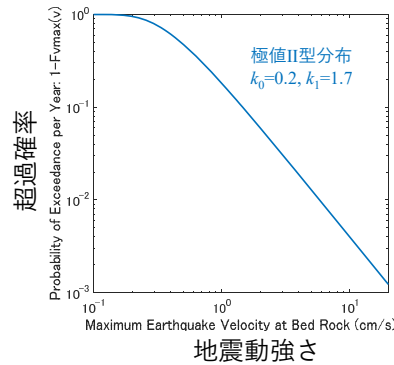
式(8.19)に式(8.16)を代入して、

$$F_Y(y) = \exp\left[-C \cdot v t \cdot y^{-\frac{\beta}{b_2}}\right] \quad (8.20)$$

これを整理して、

$$F_Y(y) = \exp[-k_0 \cdot y^{-k_1}] \quad (8.21) \times 1$$

$$\begin{cases} k_0 = C \cdot v t \\ k_1 = \frac{\beta}{b_2} \end{cases}$$



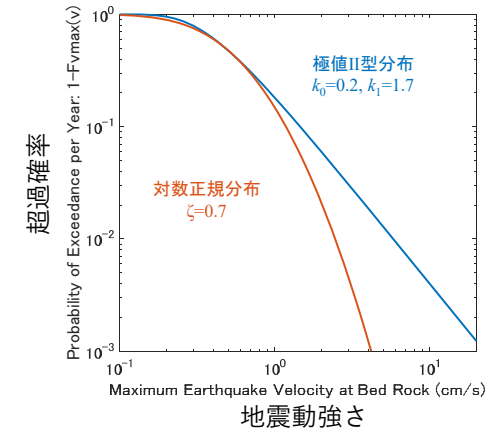
※ 1 式(8.21)は、次式で示される極値II型分布となっている。

$$F_X(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\varepsilon}{v}\right)^{-k}\right] \quad \varepsilon \leq x < \infty \quad (8.A1)$$

12

## 地震動の確率分布はファットテール

- ◆ 地震動の確率分布極値II型は、対数正規分布などに比較して、超過確率がいつまでも減衰しないファットテールとなっている。



13

## なぜファットテールになるのか？

累積確率  $F_Y$  と超過確率  $H_Y$  は、

$$F_Y(y) = \exp[-k_0 \cdot y^{-k_1}] \quad \text{expはポアソン分布 (指数) 分布から来ている}$$

$$H_Y(y) = 1 - F_Y(y) \approx \underbrace{k_0 \cdot y^{-k_1}}_{\text{冪関数に漸近}} \quad y \gg 0 \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots \quad 1 - e^{-x} \approx x$$

超過確率は近似的に累積確率の指数部が外に出てくるので、累積確率の指数部（地震発生確率を考える前の超過確率）が、なぜ冪関数になるのかという問題に置き換えられる。

距離減衰式

$$Y = b_1 e^{b_2 M} R^{-b_3} \times 1$$

$$\downarrow$$

$$M = \frac{1}{b_2} \ln\left(\frac{Y \cdot R^{b_3}}{b_1}\right)$$

GR則

$$\log n_m = a - b \cdot M$$

↓

$$F_M(m) = 1 - e^{-\beta(m-m_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{代入}} P_Y = C \cdot y^{-\frac{\beta}{b_2}} \quad \beta = b \ln 10$$

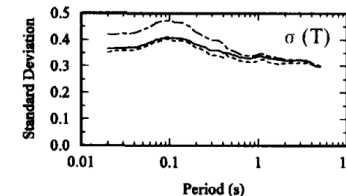
※ 1 もともと、マグニチュードが地震動強さのlogで定義されているため、この形が出てくる。つまり、距離減衰式がこの形になるのは偶然ではなく、ほぼマグニチュードの定義の問題と言って良い。

$$M = 1.73 \log \Delta + \log A - 0.83 \quad \Delta: \text{震央距離} \quad A: \text{地震計の振幅} \quad (\text{坪井式})$$

14

## 地震動予測の変動

- ◆ 距離減衰式を用いた場合でも、震源モデルを用いた場合でも、地震動予測には大きな不確かさが伴う。
  - ◇ 距離減衰式の場合、その変動係数は0.5~1.0くらいになる。
- ◆ 距離減衰式による地震動予測に変動が伴うとすれば、さらに大きな地震動が発生する可能性もあることになるので、地震危険度解析で考慮する必要がある。



※ 左図は常用対数の標準偏差で表示されているので、変動係数に対応する自然対数の標準偏差は2.3倍する必要がある

図 8 回帰誤差の比較 内山・翠川,2006より引用

15

## 距離減衰式の変動の考慮方法

地震動の確率密度（ここでは極値II型分布）を、

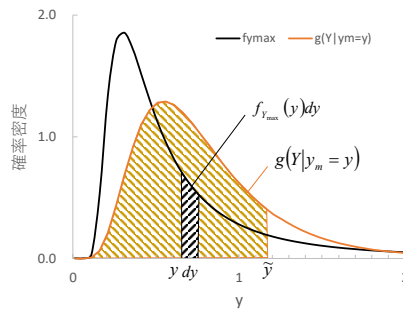
$$f_{Y_{\max}}(y) = \frac{dF_{Y_{\max}}(y)}{dy} \quad (8.22)$$

中央値 $y_m$ が $y$ のときの地震動予測式（距離減衰式など）から予測される地震動 $Y$ の確率密度を、

$$g(Y|y_m = y) \quad (8.23)$$

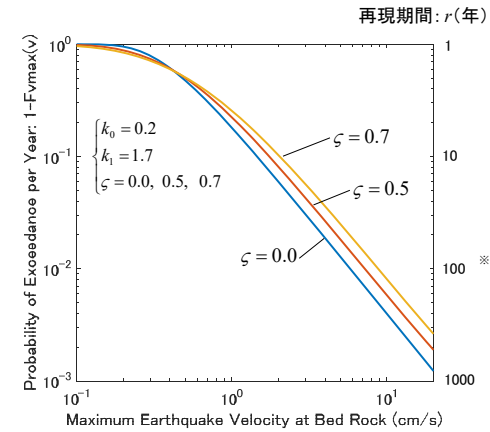
とすると、地震動の累積確率分布は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_{\tilde{y}_{\max}}(\tilde{y}) &= \int_0^{\tilde{y}} \int_0^{\tilde{y}} g(Y|y_m = y) dY f(y) dy \\ &= \int_0^{\tilde{y}} G(\tilde{y}|y_m = y) f(y) dy \end{aligned} \quad (8.24)$$



16

## 距離減衰式の変動を考慮した超過確率



◆  $V=10\text{cm/s}$ で再現期間※で、距離減衰式の変動の影響を比較すると、

- ◇  $\zeta=0$ の場合で約250年
- ◇  $\zeta=0.5$ の場合で約170年
- ◇  $\zeta=0.7$ の場合で約120年

※ 年超過確率 $p$ （左図縦軸）の逆数が再現期間 $r$ （年）となる。

年超過確率 $p$ の地震が発生するちょうど $i$ 年目に発生する確率は、

$$(1-p)^{i-1} p$$

よって、次に発生する間隔の期待値 $r$ は、

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1} p = \frac{1}{p}$$

数学公式集II, p.53

17

## 超過確率の近似表現

距離減衰式の不確かさを考慮した割り増しは必要になるが、大略は極値II型で表されるものとして、再び式(8.21)の戻って検討を進める。

地震動の超過確率は、式(8.21)より次のように与えられる。

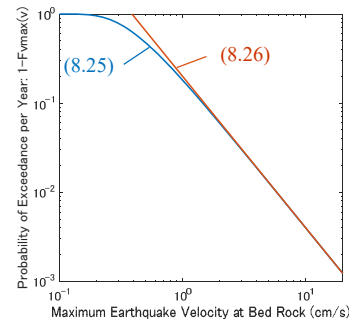
$$H_{Y_{\max}}(y) = 1 - \exp[-k_0 \cdot y^{-k_1}] \quad (8.25)$$

指数関数については、指数が1より小さい領域では次の近似がなりたつ。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \approx 1 + x \quad x < 1$$

よって、超過確率が小さい領域で次のような近似がなりたつ。

$$H_{Y_{\max}}(y) \approx \quad (8.26)$$



18

## 構造物の破壊確率

構造物の脆弱性が地震動強さ $y$ の確率で与えられるとき、破壊確率は、一般に以下のように与えられる。

$$P_f = \int_0^{\infty} H_{Y_{\max}}(y) f_F(y) dy \quad (8.27)$$

$$\begin{cases} H_{Y_{\max}}(y) : \text{地震動の超過確率} \\ f_F(y) : \text{構造物の脆弱性(確率密度)} \end{cases}$$

構造物の脆弱性が、以下の対数正規分布で与えられとする。

$$f_F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \quad \lambda = E[\ln Y] \quad \zeta = \sqrt{\text{Var}[\ln Y]} \quad (8.28)$$

地震動の超過確率を式(8.26)で与えると、構造物の破壊確率は、

$$P_f \approx \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_0^{\infty} y^{-k_1-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] dy \quad (8.29)$$

19

## 構造物の破壊確率の積分実行

式(8.29)で $z=\ln y$ とにおいて、

$$P_f \approx \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-k_1 z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\lambda}{\zeta}\right)^2\right] dz \quad (8.30)$$

式(8.30)を操作して、正規分布の形になる部分を括り出すと、

$$\begin{aligned} P_f &\approx \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 + 2k_1\zeta^2 z}{\zeta^2}\right] dz \\ &= \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{z^2 + 2(k_1\zeta^2 - \lambda)z + \lambda^2}{\zeta^2}\right] dz \\ &= \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(z + k_1\zeta^2 - \lambda)^2 - (k_1\zeta^2)^2 + 2k_1\zeta^2\lambda - \lambda^2 + \lambda^2}{\zeta^2}\right] dz \\ &= k_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(z + k_1\zeta^2 - \lambda)^2}{\zeta^2}\right] dz}_{\text{正規分布の形になっているので積分すると1}} \cdot \exp\left[-k_1\lambda + \frac{k_1^2\zeta^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (8.31)$$

20

## 構造物の破壊確率

以上より、構造物の破壊確率の算定式が以下のように得られる。

$$P_f \approx k_0 \exp[-k_1\lambda] \cdot \exp\left[\frac{k_1^2\zeta^2}{2}\right] \quad (8.32)$$

- $\lambda$ は構造物の耐力の対数平均 (= 中央値の対数) であるから、第1因子は耐力が中央値に等しい場合の破壊確率
- 第2因子は、構造物の耐力のばらつきを表す $\zeta$ と地震動の超過確率の傾きを表す $k_1$ の関数となっており、構造物耐力のばらつきによる補正係数を表す

よって、形式的に以下のように表現することもできる。

$$P_f \approx P_E \cdot C_S \quad (8.33)$$

$$\begin{cases} P_E = k_0 \exp[-k_1\lambda]: \text{構造物のばらつきを考慮しない破壊確率} \\ C_S = \exp\left[\frac{k_1^2\zeta^2}{2}\right]: \text{構造物のばらつきを考慮した補正係数} \end{cases}$$

21