

都市防災工学

後半第7回：断層モデルと地震動のスペクトル特性

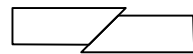
千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
岡野 創
<http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html>

講義予定

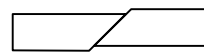
1. 導入・確率過程の基礎：2020年11月25日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2020年12月2日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2020年12月9日
4. 入力エネルギー：2020年12月16日
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年12月23日
6. ランダムウォークと残留変形：2021年1月6日
7. **断層モデルと地震動のスペクトル特性：2021年1月20日**
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2021年1月27日

断層の種類

■ 断層の種類別

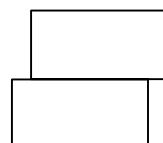
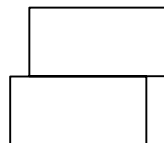


逆断層 =



正断層 =

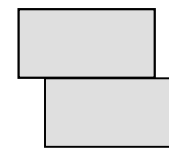
(断面図)



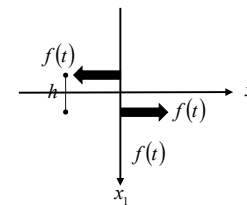
横ずれ断層（右横ずれの例を示す）
(平面図)

断層運動に等価な地震モーメント

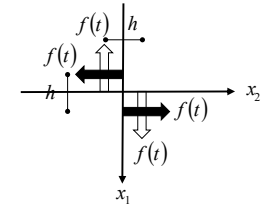
◆ 断層は、シングルカップルかダブルカップルか？



断層運動



シングルカップル



ダブルカップル

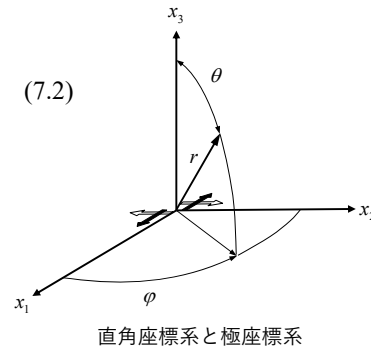
◆ 断層に作用する力は、すべて**ダブルカップル**の地震モーメントによって表される。

$$m(t) = \quad (7.1)$$

1点に作用するダブルカップルの解

地盤を一様で無限に広がる弾性体と仮定し、ダブルカップルが点震源として作用するときの解は得られている。 r^1, r^2, r^3, r^4 に比例する項があるが、 r^2 以上の高次の項は急速に減衰するので、 r^1 に比例する項のみ取り出すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} u_r(t) &= \frac{1}{4\pi\rho V_p^3 r} \sin^2 \theta \sin 2\varphi \cdot \dot{m} \left(t - \frac{r}{V_p} \right) \\ u_\theta(t) &= \frac{1}{4\pi\rho V_s^3 r} \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\varphi \cdot \dot{m} \left(t - \frac{r}{V_s} \right) \\ u_\varphi(t) &= \frac{1}{4\pi\rho V_s^3 r} \sin \theta \cos 2\varphi \cdot \dot{m} \left(t - \frac{r}{V_s} \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

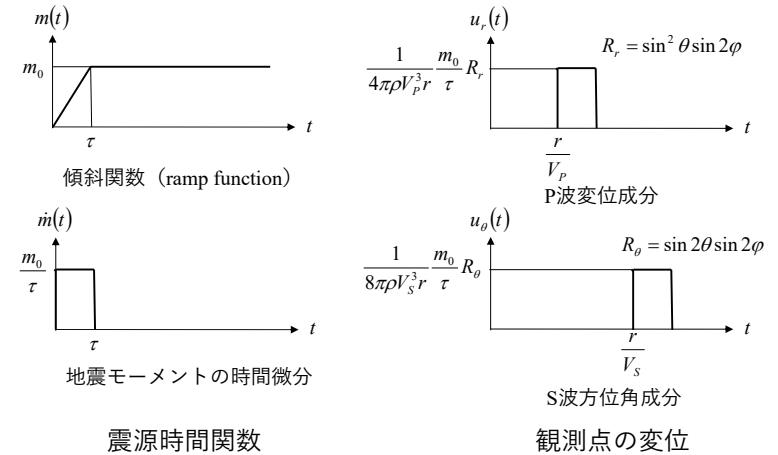


※ なぜ地震モーメントの時間微分が表れるのか？
1方向加振の解を組み合わせてシングルカップルの解を求める際に、空間微分を行うが、これを置換微分で計算する際に時間微分が表れる。

4

地震モーメントの時間関数と変位

断層が滑るのには時間がかかり、地震モーメントは瞬時には立ち上がらない。地震モーメントを傾斜関数とした場合の、変位を下図に示す。



5

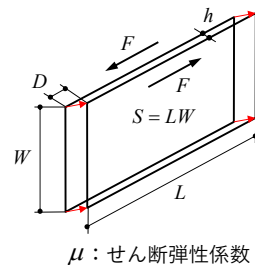
震源の空間的広がりを考える

これまで点震源を考えていたが、ここから断層面の広がり（ただし1次元）を考える。断層面の応力-歪み関係は次のように書くことができる。

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{D}{L} \quad (7.3)$$

ここで、 μ は地盤の横弾性係数である。式(7.3)は、次のように書きかえる。

$$m_0 = Fh = \mu SD = \mu LWD \quad (7.4)$$



m_0 は地震モーメントと呼ばれる、断層の規模を決める重要な量である。

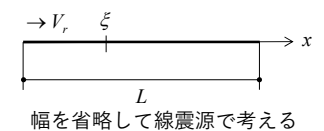
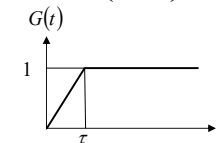
6

破壊の伝播を考える (1)

断層面内を破壊が伝播する効果を考える。簡単のため断層の幅を無視して、線震源で考える (Haskellモデル)。破壊は速度 V_r で断層の左端から右端に向かって進行するとする。

次式で表されるくい違いを考える。

$$U(\xi, t) = D \cdot G \left(t - \frac{\xi}{V_r} \right) \quad (7.5)$$



このとき、断層面の地震モーメントは次式のように表される。

$$m(t) = \mu LWD \int_0^L G \left(t - \frac{\xi}{V_r} \right) d\xi \quad (7.6)$$

7

破壊の伝播を考える (2)

赤線の波面に伝わってくる $x=0$ の破壊は、 $x=\xi$ から見て ξ/V_r 前の破壊現象で、弾性波として伝わってくるのに $\xi \cos \theta_d / V_c$ かかるので、その時間差は、

(7.7)

よって ξ のくい違いの寄与は、

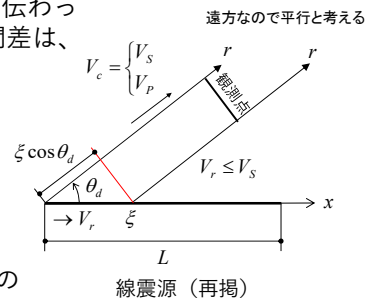
$$G(\xi, t) = G\left(t - \frac{\xi}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right)\right) \quad (7.8)$$

式(7.2)を用いると、観測点 r における変位の c ($=r, \theta, \varphi$)成分は次のように与えられる。

$$U_c(r, t) = \frac{\mu W D \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \int_0^L \left[\frac{d}{dt} G\left(t - \frac{r}{V_c} - \frac{\xi}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right)\right) \right] d\xi \quad (7.9)$$

(厳密には、破壊位置によって観測点までの距離 r には差があるが、ここでは観測点は遠方 ($L \ll r$) にあると考えて無視している。)

8



破壊の伝播を考える (2)

(続き)

$$U_c(r, t) = \frac{\mu W D \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \int_0^L \left[\frac{d}{dt} G\left(t - \frac{r}{V_c} - \frac{\xi}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right)\right) \right] d\xi \quad (7.9)$$

変数変換して、積分のみ取り出すと、 $t' = \frac{d'}{d\xi} = -\frac{1}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right)$

$$-\frac{V_r}{1 - (V_r/V_c) \cos \theta_d} \int_{t - \frac{r}{V_c}}^{t - \frac{r}{V_c} - t_c} \left[\frac{d}{dt'} G(t') \right] dt' = \frac{V_r}{1 - (V_r/V_c) \cos \theta_d} \left[\dots \right]$$

ここで、 $t_c = \frac{L}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right)$

以上より、

$$U_c(r, t) = \frac{\mu L W D \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{1}{t_c} \left[G\left(t - \frac{r}{V_c}\right) - G\left(t - \frac{r}{V_c} - t_c\right) \right] \quad (7.10)$$

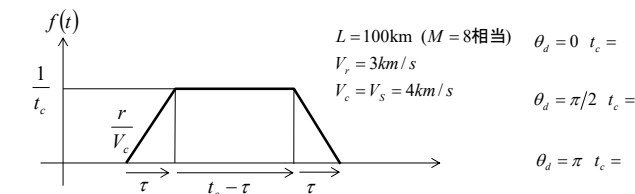
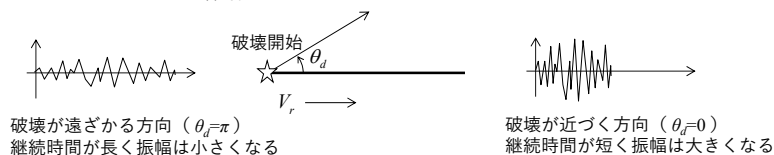
積分を実行する

9

変位の時間依存因子

式(7.10)から時間依存の部分抜き出すと、

$$f(t) = \frac{1}{t_c} \left[G\left(t - \frac{r}{V_c}\right) - G\left(t - \frac{r}{V_c} - t_c\right) \right] \quad t_c = \frac{L}{V_r} \left(1 - \frac{V_r}{V_c} \cos \theta_d\right) \quad (7.11)$$



変位の時間変化を図示してみる

10

周波数特性 (1)

式(7.11)をフーリエ変換する。

- 原点移動した滑り関数 $t_c f(t)$ のフーリエ変換

$$t_c \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt = \quad (7.12)$$

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{i\omega t + 1}{\omega^2} \right) e^{-i\omega t} \right]_0^\tau = \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{i\omega \tau + 1}{\omega^2} \right) e^{-i\omega \tau} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

$$I_2 = \int_\tau^{t_c} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega t_c} - e^{-i\omega \tau}) = \frac{i\omega}{\omega^2} (e^{-i\omega t_c} - e^{-i\omega \tau})$$

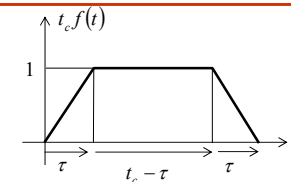
$$I_3 = \int_0^\tau \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right) e^{-i\omega t'} dt' = \left\{ \frac{i\omega}{\omega^2} (e^{-i\omega \tau} - 1) - \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{i\omega \tau + 1}{\omega^2} \right) e^{-i\omega \tau} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right\} e^{-i\omega t_c}$$

これらをまとめて、

$$I_1 + I_2 + I_3 = \left[\left(\frac{e^{-i\omega \tau} - 1}{\tau \omega^2} \right) \right] (1 - e^{-i\omega t_c}) \quad (7.13)$$

変位波形をフーリエ変換する

11



周波数特性 (2)

時間遅れ r/V_c による位相遅れを考慮して、

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{t_c} e^{-i\omega \frac{r}{V_c}} = \left[\frac{e^{-i\omega t_c} - 1}{\tau \omega^2 t_c} \right] (1 - e^{-i\omega t_c}) e^{-i\omega \frac{r}{V_c}} \\ &= \frac{e^{-i\omega t/2} (e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2}) / 2}{\omega \tau / 2} \cdot \frac{e^{-i\omega t_c/2} (e^{i\omega t_c/2} - e^{-i\omega t_c/2}) / 2}{\omega t_c / 2} e^{-i\omega \frac{r}{V_c}} \\ &= -\frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \cdot \frac{\sin \omega t_c / 2}{\omega t_c / 2} \cdot \underbrace{e^{-i\omega \left(\frac{r}{V_c} + \frac{\tau + t_c}{2} \right)}}_{\text{絶対値 1}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

以上より、変位のフーリエ振幅は次式で与えられる。

$$|U_c(\omega)| = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \left| \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \right| \left| \frac{\sin \omega t_c / 2}{\omega t_c / 2} \right| \quad (7.15)$$

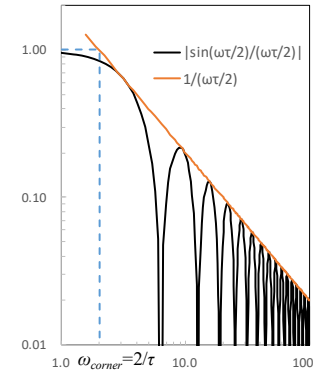
振幅×位相の形に整理する

12

$|\sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)|$ の周波数特性

式(7.15)に表れる $|\sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)|$ の性質を確認する。

$|\sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)|$ は、 ω に反比例して減少する関数で、そのカットオフ円振動数 ω_c は、 $2/\tau$ で与えられる。



低振動数側は、

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{|\sin \omega \tau / 2|}{\omega \tau / 2} \approx \frac{\omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} = 1$$

高振動数側は、振動成分を無視すると、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \approx \underbrace{\frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}}_{\text{振動1の振動成分}} \cdot \frac{1}{\omega \tau / 2}$$

ω^{-1} で減少

交点をコーナー振動数とすると、

$$\frac{\omega \tau}{2} = 1 \rightarrow \omega_{\text{corner}} = \frac{2}{\tau} \quad \text{コーナー振動数}$$

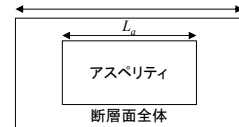
$$T_{\text{corner}} = \pi \cdot \tau \quad \text{コーナー周期}$$

(7.15)の構成因子の周波数特性を調べる

13

断層モデルの諸元

以下のようにパラメータを設定して、変位のフーリエ振幅を計算してみる。



$M = 8$
 $L = 140\text{km}$: 宇津
 $W = 70\text{km}$: 宇津
 $L_a = \sqrt{0.35} \cdot 140 = 80\text{km}$: レンビ
 (L_a はアスペリティの長さで、実質的な破壊の進行長として用いる)
 $V_s = 3.4\text{km/s}$
 $V_r = 0.8V_s = 2.72\text{km/s}$: レンビ解説
 $D = 8\text{m}$: 宇津
 $\tau = 8\text{sec}$: 宇津
 $R_c = 0.63$: 等方放射係数
 $\theta_d = 90^\circ$

● 第1コーナー振動数

$$t_c = \frac{L}{V_r} = \frac{80}{2.72} = 29.4\text{s}$$

$$\omega_1 = \frac{2}{t_c} = \frac{2}{29.4} = 0.068\text{rad/s}$$

$$T_1 = \pi \cdot t_c = 3.14 \times 29.4 = 88.2\text{s}$$

● 第2コーナー振動数

$$\omega_2 = \frac{2}{\tau} = \frac{2}{8} = 0.25\text{rad/s}$$

$$T_2 = \pi \cdot \tau = 3.14 \times 8 = 25.12\text{s}$$

14

変位のフーリエ振幅

$$\omega \leq \omega_1$$

$$|U(\omega)| = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \equiv U_{\text{const}}$$

一定

$$\omega_1 < \omega \leq \omega_2$$

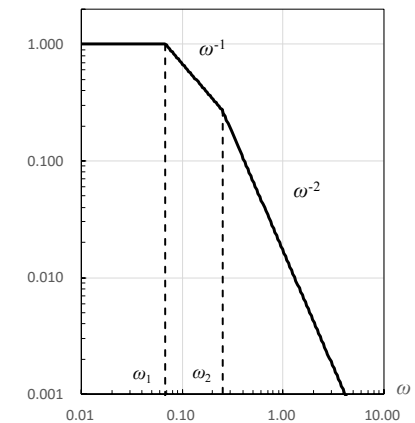
$$|U(\omega)| = \frac{\mu LWD \cdot R_c \omega_1}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{1}{\omega}$$

ω^{-1} 比例

$$\omega_1 < \omega$$

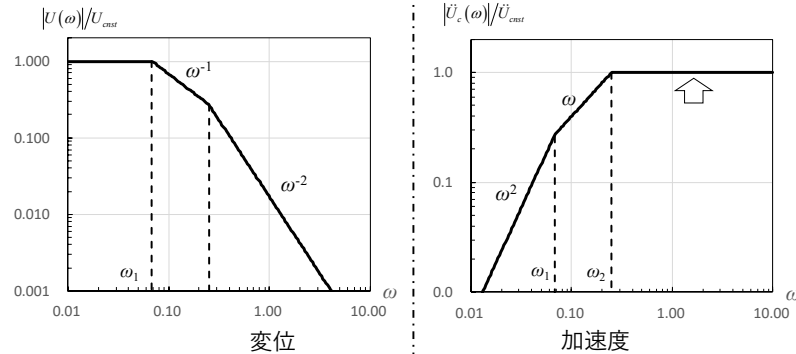
$$|U(\omega)| = \frac{\mu LWD \cdot R_c \omega_1 \omega_2}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{1}{\omega^2}$$

ω^{-2} 比例 \rightarrow



15

変位と加速度のフーリエ振幅



$\omega \leq \omega_1$	$ U(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \equiv U_{cnst}$	$ \ddot{U}(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \omega^2$
$\omega_1 < \omega \leq \omega_2$	$ U(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c \cdot \omega_1}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{1}{\omega}$	$ \ddot{U}(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \omega_1 \omega$
$\omega_1 < \omega$	$ U(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c \cdot \omega_1 \omega_2}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{1}{\omega^2}$	$ \ddot{U}(\omega) = \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \omega_1 \omega_2 \equiv \ddot{U}_{cnst}$

16

地震モーメントと地震動の大きさ

経験的に、断層の長さL、滑り量D、ライズタイムは比例するとされている（スケール則）。

$$L \propto W \propto D \propto \tau$$

地震モーメント m_0 は、断層の長さの3乗に比例する。

$$m_0 = \mu LWD \quad \text{:地震モーメント}$$

◆ 変位の長周期成分

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |U_c(\omega)| \approx \frac{\mu LWD \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} = \frac{m_0 \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3}$$

地震モーメントに比例
= 断層長さの3乗に比例

◆ 加速度の短周期成分

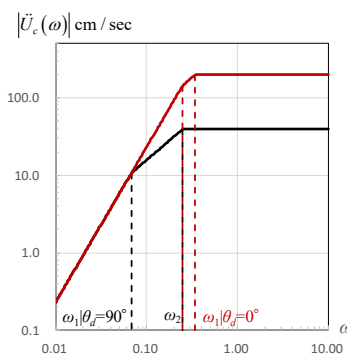
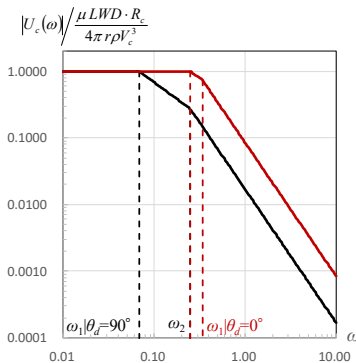
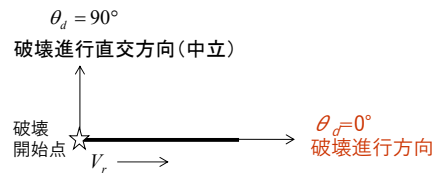
$$|\ddot{U}_c(\omega)| \approx \frac{m_0 \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \omega_1 \omega_2 \sim \frac{m_0 \cdot R_c}{4\pi r \rho V_c^3} \frac{2}{\tau} \cdot \frac{2}{t_c}$$

τ と t_c が地震モーメントの1/3乗に比例することを考慮すると、加速度は地震モーメントの1/3乗に比例 = 断層の長さに比例

17

破壊進行方向の影響

- ◆ 観測点が破壊進行方向にあると高振動数側のフーリエ振幅が大きくなる。
◇ = 総入力エネルギーが大きくなる

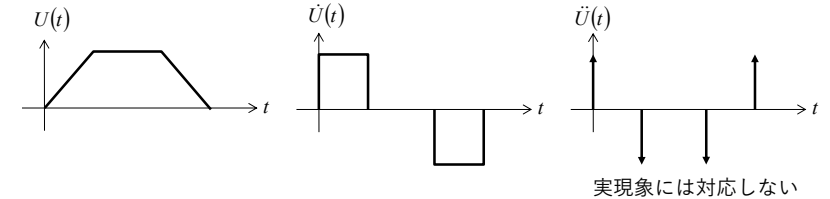


破壊進行方向の加速度振幅（=短周期レベル）への影響

18

断層モデル（Haskell）の波形

Haskellモデルから出てくる波形



- ◆ 断層モデルによる地震動予測では、実現に合わせて以下のような工夫を行い、不自然な波形とならないようにしている。
 - ◇ 滑り関数に非線形滑りを模擬した関数を用いる。
 - ◇ 滑り関数に揺らぎを与える。
 - ◇ 小地震の統計的な周波数特性に合わせた模擬波を、断層の破壊に合わせて足し合わせる。（統計的グリーン関数法）
 - ◇ 小地震の観測記録を足し合わせて、大地震の地震動を合成する（経験的グリーン関数法）

19

まとめ：断層モデルと地震波のスペクトル特性

- ◆ Haskellモデルでは、高振動数側（建物が影響を受ける領域）では、変位のフーリエ振幅は、 ω^{-2} 比例で減少する。
（ ω^2 モデル）
- ◆ これは、加速度のフーリエ振幅は、高振動数側で一定（ホワイトノイズ）になるということと同義
 - ◇ ω^2 モデルは、地震動の加速度波形はホワイトノイズであると言っているのと同じ
- ◆ Housnerによって指摘された、速度応答スペクトルは一定になるという傾向とも整合する。
 - ∴減衰ゼロの速度応答スペクトルは、加速度波形のフーリエ振幅と一致する