

都市防災工学

第5回：最大値分布（ピークファクター）

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
岡野 創
<http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html>

講義予定

1. 導入・確率過程の基礎
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答
4. エネルギーバランス
5. **最大値分布（ピークファクター）**
6. ランダムウォークと残留変形
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）

1

最大値とピークファクター

- ◆ 工学的には最大応答値を知りたいことが多い
- ◆ ランダム振動論では、最大応答値は次のように与える。

$$X_{\max} = p \cdot \sigma_X \quad (5.1)$$

p : ピークファクター
 σ_X : 確率過程 X の標準偏差

- ◆ ピークファクターには厳密解は存在しない。しかし、近似解は幾つか存在し、適切に使用すれば比較的精度よく最大応答値を求めることができる。

2

閾値横断(threshold crossing)

波形の振幅が閾値 α を超える回数を数える方法を考える（図1）。
次のようなステップ関数を考える（図2）。

$$Y(t) = U(X(t) - \alpha) \quad (5.2)$$

ここで、ステップ関数は X 軸上で定義されていることに注意して、式(5.2)を t で微分すると、

$$\dot{Y}(t) = \delta(X(t) - \alpha) \dot{X}(t) \quad (5.3)$$

を得る（図3）。 $t_1 \sim t_2$ に閾値を横断する回数
は、

$$\begin{aligned} N(\alpha, t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{Y}(t)| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{X}(t)| \delta(X(t) - \alpha) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} N(\alpha, t) dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

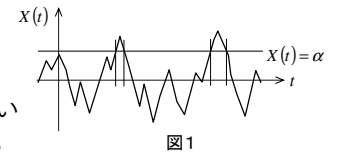


図1

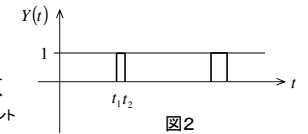


図2

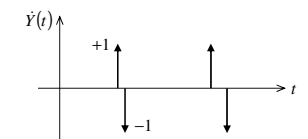


図3

ピークの分布を考える

3

閾値横断回数期待値

式(5.4)中の被積分関数は、単位時間あたりの横断回数（閾値横断率）を表す。

$$N(\alpha, t) = |\dot{X}(t)| \delta(X(t) - \alpha) \quad (5.5)$$

ここで、 X, \dot{X} を確率変数（確率過程）と考えて、上式の期待値を求める。 X, \dot{X} の確率密度関数を用いて、時刻 t における単位時間あたりの横断数の期待値は、次のように与えられる。

$$E[N(\alpha, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}(t)| \delta[X(t) - \alpha] f_{X, \dot{X}}(x, \dot{x}, t) dx d\dot{x} \quad (5.6)$$

$x, dx/dt$ に関する積分なので、積分区間は $[-\infty, \infty]$ となる

上式は、**閾値横断数の期待値の一般的な表現**である。

定常過程の場合は、時間 t に依存しないので、

$$E[N(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{x} \quad (5.7)$$

ピークの分布を考える

4

ガウス過程の閾値横断数（1）

最大値を求めるために、速度が正で上向きに横断する数を求める。

$$E[N^+(\alpha)] = \int_0^{\infty} \dot{x} f_{X, \dot{X}}(\alpha, \dot{x}) d\dot{x} \quad (5.8)$$

x と \dot{x} が平均がゼロで互いに独立なガウス過程とすると、確率密度関数は、

$$f_{X, \dot{X}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right) \quad (5.9)$$

式(5.9)を式(5.8)に代入すると、

$$E[N^+(\alpha)] = \int_0^{\infty} \dot{x} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right) d\dot{x} \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right) \int_0^{\infty} \dot{x} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}} d\dot{x}$$

$[e^{-ax^2}]' = -2axe^{-ax^2}$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

ガウス過程の場合

5

期待振動数 = ゼロクロス数の期待値

ゼロクロス数の期待値は、式(5.10)で $\alpha=0$ において、

$$f_e = E[N^+(0)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \quad (5.11)$$

標準偏差をパワースペクトル密度で表すと、

$$E[N^+(0)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (5.12)$$

$S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$

ここで、

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_{XX}(\omega) d\omega : n\text{次のスペクトルモーメント} \quad (5.13)$$

以上より、**スペクトルからゼロクロス数の期待値が求められる。**

スペクトルモーメントから期待振動数を求める

6

期待振動数の計算例

パワースペクトル密度関数が下図のように与えられる確率過程のゼロクロス数の期待値を求める。

$$m_2 = 2 \int_{\omega_0}^{\alpha\omega_0} \omega^2 S_0 d\omega = \frac{2(\alpha^3 - 1)}{3} \omega_0^3 S_0$$

$$m_0 = 2 \int_{\omega_0}^{\alpha\omega_0} S_0 d\omega = 2(\alpha - 1) \omega_0 S_0$$

$$\omega_e = 2\pi f_e = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = \sqrt{\frac{\alpha^3 - 1}{3(\alpha - 1)}} \cdot \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{3}} \cdot \omega_0$$

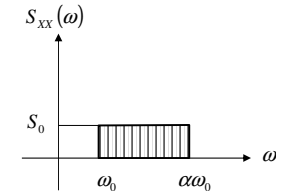
例えば、

$$\alpha = 2$$

$$\omega_e =$$

$$\alpha = 5$$

$$\omega_e =$$

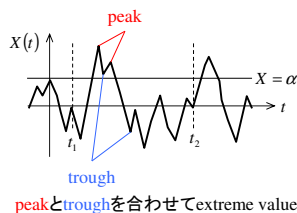


7

極値分布 (extreme value distribution) (1)

極値 (ピーク+トラフ) では速度がゼロであることから、 $t_1 \sim t_2$ の $X > \alpha$ の極値の数は、

$$n(\alpha, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\ddot{x}(t)}_{\text{peak}} \underbrace{\delta[\dot{x}(t)]}_{\text{trough}} \underbrace{U(x(t) - \alpha)}_{\text{extreme value}} dt \quad (5.14)$$



$t_1 \sim t_2$ の $X > \alpha$ のピークの数、

$$m(\alpha, t_1, t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t) \delta[\dot{x}(t)] U(x(t) - \alpha) dt \quad \ddot{x} < 0 \quad (5.15)$$

ピークでは加速度は負だから

その期待値は、

$$\begin{aligned} E[m(\alpha, t_1, t_2)] &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) \delta[\dot{x}(t)] U(x(t) - \alpha) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dx d\dot{x} d\ddot{x} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^0 \int_{\alpha}^{\infty} \ddot{x}(t) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(x, 0, \ddot{x}, t) dx d\dot{x} dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

厳密なピークの確率分布を求める

8

極値分布 (2)

単位時間あたりの α 以上のピーク数の期待値は、

$$E[M(\alpha, t)] = - \int_{-\infty}^0 \int_{\alpha}^{\infty} \ddot{x}(t) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(x, 0, \ddot{x}, t) dx d\dot{x} \quad (5.17)$$

単位時間あたりの全てのピーク数の期待値は、

$$E[M_T(t)] = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(x, 0, \ddot{x}, t) dx d\dot{x} \quad (5.18)$$

単位時間あたりのピーク振幅の累積確率分布は、

$$F_{X_p}(\alpha; t) \equiv \Pr[X_p < \alpha] = E[\quad] = \quad (5.19)$$

数学的には正確ではないが、次のように近似する。

$$F_{X_p}(\alpha; t) \approx \quad (5.20)$$

厳密なピークの確率分布を求める

9

極値分布 (3)

$$F_{X_p}(\alpha; t) \approx 1 - \frac{E[M(\alpha, t)]}{E[M_T(t)]} \quad (5.20)$$

式(5.20)を微分してピーク振幅の確率密度を求める。

$$f_{X_p}(\alpha; t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} F_{X_p}(\alpha; t) \approx \quad (5.21)$$

式(5.17)を式(5.21)に代入して、次式が得られる。

$$f_{X_p}(\alpha; t) \approx \frac{\int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(\alpha, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) f_{x, \dot{x}, \ddot{x}}(x, 0, \ddot{x}, t) dx d\dot{x}} \quad (5.22)$$

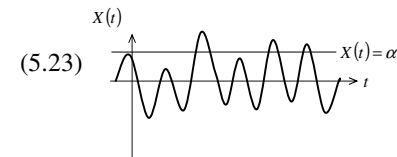
厳密なピークの確率分布を求める

10

狭帯域過程の極値分布 (1)

狭帯域過程では、ピークは正の、トラフは負の側にしか存在しないと想定することができる。このような想定のもとでは、 α より大きいピークの期待数は、閾値 α の上向きの横断回数 (式(5.8)) に等しいと見なせる。よって、

$$\begin{aligned} E[M(\alpha, t)] &\approx E[N^+(\alpha, t)] \\ &= \int_0^{\infty} \dot{x} f_{x, \dot{x}}(\alpha, \dot{x}, t) d\dot{x} \end{aligned} \quad (5.23)$$



この場合の全ピーク数の期待値は、

$$E[M_T(t)] \approx E[N^+(0, t)] = \int_0^{\infty} \dot{x} f_{x, \dot{x}}(0, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad (5.24)$$

式(5.20)で用いた近似を用いると、ピーク振幅の確率密度は、

$$f_{X_p}(\alpha; t) \approx \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} E[M(\alpha, t)]}{E[M_T(t)]} \approx \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} E[N^+(\alpha, t)]}{E[N^+(0, t)]} = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \dot{x} f_{x, \dot{x}}(\alpha, \dot{x}, t) d\dot{x}}{\int_0^{\infty} \dot{x} f_{x, \dot{x}}(0, \dot{x}, t) d\dot{x}} \quad (5.25)$$

式(5.21)

ピークの確率分布を求める条件を緩和する → 狭帯域過程

11

狭帯域過程の極値分布 (2)

既出の下式を、式(5.25)に代入すると、

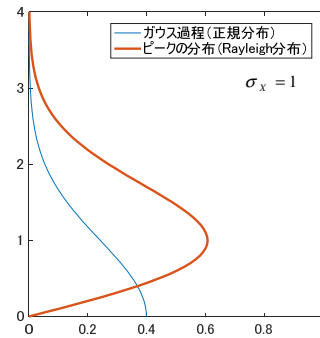
$$E[N^+(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (5.10)$$

$$E[N^+(0)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \quad (5.11)$$

ピークの確率密度関数が次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} f_{x_p}(\alpha; t) &\approx -\frac{\partial}{\partial \alpha} E[N^+(\alpha, t)] \\ &= \frac{\alpha}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (5.26) \end{aligned}$$

式(5.26)は、Rayleigh分布である。



狭帯域仮定のピークの確率分布

12

狭帯域過程の最大値分布

次に、極値の中の最大値を考える。

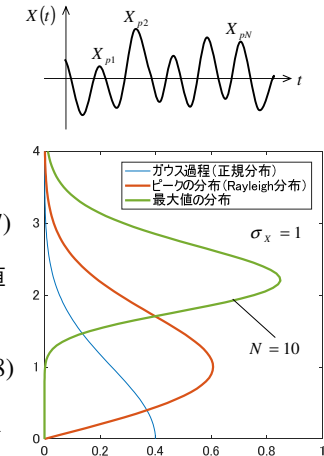
N 個のピークの最大値 x_m の累積確率分布 (非超過確率) は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_{x_m}(x_m) &\equiv \Pr[X_m < x_m] \\ &= \Pr[X_{p1} < x_m \cap \dots \cap X_{pN} < x_m] \quad (5.27) \end{aligned}$$

X_{p_j} は互いに独立であると仮定する*と最大値の確率分布は次式で与えられる。

$$F_{x_m}(x_m) \approx \quad (5.28)$$

*かなり問題のある仮定で、本当は包絡線が小さくなったときは最大値が生じないという現象があり、隣り合うピークの振幅には相関がある。



ピークから最大値

13

最大値の確率密度関数

狭帯域過程のピークの確率密度はRayleigh分布で与えられるので、累積確率分布はその積分として次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_{x_p}(x_p) &= \int_0^{x_p} \frac{\alpha}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right) d\alpha = \left[-\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right) \right]_0^{x_p} \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x_p^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (5.29) \end{aligned}$$

最大値の確率密度は、

$$\begin{aligned} f_{x_m}(x_m) &\approx \frac{d}{dx_m} F_{x_p}(x_m)^N = \frac{d}{dx_m} \left[1 - \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right) \right]^N \\ &\approx \frac{d}{dx_m} \exp\left(-N \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right)\right) \quad (5.30) \end{aligned}$$

狭帯域過程の最大値分布

14

最大値の期待値

狭帯域過程の仮定より、ピーク数の期待値は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} N &= f_e \cdot T \\ f_e &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (5.31) \end{aligned}$$

ここに T は継続時間である。よって、最大値の期待値は、

$$\begin{aligned} E[X_m] &= \int_0^\infty x_m f_{x_m}(x_m) dx_m \\ &= \int_0^\infty x_m \frac{d}{dx_m} \exp\left(-f_e T \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right)\right) dx_m \quad (5.32) \end{aligned}$$

最大値の確率分布から期待値へ

15

最大値の期待値の積分実行 (1)

$$E[X_m] = \int_0^\infty x_m \frac{d}{dx_m} \exp\left(-f_e T \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right)\right) dx_m \quad \text{再掲(5.32)}$$

ここで、次のような置き換えを行う。

$$y = f_e T \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right) \longrightarrow \ln y = \ln(f_e T) - \frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}$$

x_m について解くと、

$$\begin{aligned} x_m &= \sigma_x \sqrt{2(\ln(f_e T) - \ln y)} = \sigma_x \sqrt{2\ln(f_e T)} \sqrt{1 - \frac{\ln y}{\ln(f_e T)}} \\ &\approx \sigma_x \sqrt{2\ln(f_e T)} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\ln y}{\ln(f_e T)}\right] = \sigma_x \left[\sqrt{2\ln(f_e T)} - \frac{\ln y}{\sqrt{2\ln(f_e T)}}\right] \quad (5.33) \end{aligned}$$

期待値の積分実行

16

最大値の期待値の積分実行 (2)

これらを(5.32)に代入して、

$$\begin{aligned} E[X_m] &= \int_0^\infty x_m \frac{d}{dx_m} \exp\left(-f_e T \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right)\right) dx_m \\ &= \int_0^\infty x_m \frac{de^{-y}}{dx_m} dx_m = - \int_0^{f_e T} x_m de^{-y} \quad \begin{matrix} x_m = 0 & y = f_e T \\ x_m \rightarrow \infty & y = 0 \end{matrix} \quad (5.34) \end{aligned}$$

$z = e^{-y}$ とおくと、 $dz/dy = de^{-y}/dy = -e^{-y}$ より、

$$\begin{aligned} E[X_m] &= \int_0^{f_e T} x_m e^{-y} dy = \int_0^\infty x_m e^{-y} dy \\ &\approx \sigma_x \int_0^\infty \left[\sqrt{2\ln(f_e T)} - \frac{\ln y}{\sqrt{2\ln(f_e T)}} \right] e^{-y} dy \\ &= \sigma_x \left[\sqrt{2\ln(f_e T)} \int_0^\infty e^{-y} dy - \frac{1}{\sqrt{2\ln(f_e T)}} \int_0^\infty \ln y e^{-y} dy \right] \quad (5.35) \end{aligned}$$

$\gamma = 0.5772$: オイラー定数
数学公式 I, p.241

期待値の積分実行

17

最大値の期待値

最終的に、次式が得られる。

$$E[X_m] = \left[\sqrt{2\ln(f_e T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(f_e T)}} \right] \cdot \sigma_x, \quad \gamma = 0.5772 \quad (5.36) \quad \text{(Davenport)}$$

ピークファクター p に相当

式(5.36)はピーク (正側) の最大値を与えるものである。
両側最大値を得る場合は、トラフ側も考慮して $2f_e$ を用いる。

$$\begin{aligned} E[X_m] &= p \cdot \sigma_x \\ p &= \left[\sqrt{2\ln(2f_e T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(2f_e T)}} \right], \quad \gamma = 0.5772 \quad (5.37) \end{aligned}$$

狭帯域過程のピークファクター

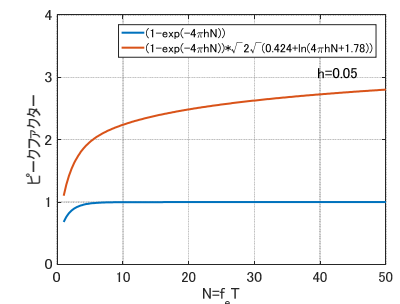
18

1 自由度系の応答のピークファクター

1 自由度系の応答には、以下に示す Rosenblueth のピークファクターが良く適合する。

$$S_a(\omega_0, h) = \sigma_a(\omega_0, h) \cdot \sqrt{1 - e^{-4\pi h f_0 T}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{0.424 + \ln(4\pi h f_0 T + 1.78)} \quad (5.38)$$

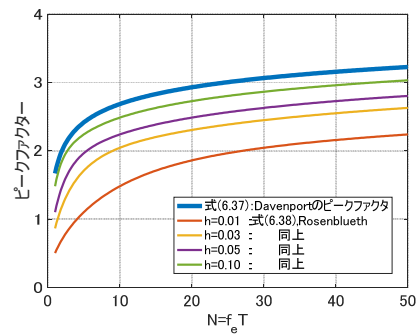
- h : 減衰定数
- f_0 : 固有振動数
- T : 地震動の主要動継続時間
- $N = f_0 T$: 波数



より精度の高いピークファクター

19

Davenport式とRosenblueth式の比較



■ 式(5.37)

$$\sqrt{2 \ln(2 f_e T)} - \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(2 f_e T)}} \quad (\text{Davenport})$$

■ 式(5.38)

$$\sqrt{1 - e^{-4\pi h f_e T}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{0.424 + \ln(4\pi h f_e T + 1.78)} \quad (\text{Rosenblueth})$$

- ◆ 式(6.39)のDavenport式は、式(5.38)のRosenblueth式より大きめとなる。これはDavenport式(5.37)では...
 - ◇ ピークを独立と仮定しているために、包絡線が小さいときに最大値が生じないという現象が考慮されていない
 - ◇ 非正常ランダム応答の非正常性が考慮されていない

より精度の高いピークファクター

20

任意の周波数特性に適用可能なピークファクター

任意の周波数特性を持つランダム波形に対しては、以下のピークファクターを適用することができる。

$$P_Y(t_d) = \left(2 \ln \left[2n \left\{ 1 - \exp \left(-q^{1.2} \sqrt{\pi \ln 2n} \right) \right\} \right] \right)^{1/2} \quad (5.39) \quad (\text{Vanmarcke})$$

ここで、

$$n = \frac{f_e \cdot t_d}{\ln(1/p)}$$

$$q = \left(1 - \frac{m_1^2}{m_0 m_2} \right)^{1/2}$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_{XX}(\omega) d\omega : n\text{次のスペクトルモーメント}$$

より精度の高いピークファクター

21