

都市防災工学

後半第4回：入力エネルギー

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
岡野 創
<http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html>

講義予定

1. 導入・確率過程の基礎：2019年12月4日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2019年12月11日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2019年12月18日
4. **入力エネルギー：2019年12月25日**
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年1月8日
6. ランダムウォークと残留変形：2020年1月15日
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性：2020年1月22日
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2020年1月29日

入力エネルギーへの3つのアプローチ

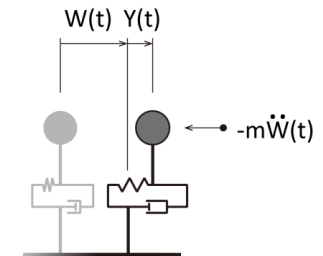
- ◆ 粘弾性系の蓄積・吸収エネルギー
 - ◇ 振動系で蓄積・吸収されるエネルギーの側から考える
 - ◆ 入力エネルギー
 - ◇ 振動系に入力するエネルギーの側から考える
 - ショットノイズによるホワイトノイズのモデル化
 - 入力エネルギー
 - ◆ 確定論的な振動論における総入力エネルギー
 - ◇ 運動方程式のエネルギー積分
 - ◇ エネルギースペクトル
 - ⇨ 時間があれば説明
- ランダム振動論（入力エネルギーが振動系の質量だけに依存することが理論的に示される）
- （総入力エネルギーが質量以外の振動系の特性に依存しないことが経験的に知られている）

粘弾性系の非定常ランダム応答

前回講義に引き続き、粘弾性1自由度系にホワイトノイズが地動として時刻0から突然作用した場合の非定常ランダム応答を考える。

$$m\ddot{Y}(t) + c\dot{Y}(t) + kY(t) = -m \cdot U(t) \cdot \ddot{W}(t) \quad (3.17)$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



振動エネルギー

振動エネルギー（＝運動エネルギー＋弾性歪みエネルギー）の期待値

$$\begin{aligned}
 E[\varepsilon_V] &= \frac{1}{2} m \sigma_Y^2(t) + \frac{1}{2} k \sigma_Y^2(t) \\
 &= \frac{m\pi S_0}{4h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t \right) \right\} \leftarrow (3.26) \\
 &+ \frac{\pi S_0 k}{4h\omega_0^3} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t \right) \right\} \leftarrow (3.21) \\
 &= \hspace{15em} (4.1)
 \end{aligned}$$

振動系に蓄積・吸収されるエネルギーを考える

4

粘性減衰による吸収エネルギー

時刻 t までに吸収されるエネルギーの期待値を考える。

$$\varepsilon_D = E \left[\int_0^t c \cdot \dot{Y}(t) dY \right] = E \left[\int_0^t c \cdot \dot{Y}(t) \cdot \underbrace{\hspace{2em}}_{(3.26)} dt \right] \hspace{10em} (4.2)$$

式(3.26)と $c=2hm\omega_0$ より、 $\sigma_Y^2(t) = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\}$

$$\begin{aligned}
 E[\varepsilon_D] &= m\pi S_0 \int_0^t \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} dt \\
 &= m\pi S_0 \left\{ \left[t + \frac{1}{2h\omega_0} e^{-2h\omega_0 t} \right]_0^t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2h^2}{1-h^2} \int_0^t e^{-2h\omega_0 t} \sin^2 \omega_d t dt + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-2h\omega_0 t} \sin \omega_d t \cos \omega_d t dt \right\} \hspace{5em} (4.3) \\
 &\hspace{15em} I_0 \hspace{15em} I_2
 \end{aligned}$$

振動系に蓄積・吸収されるエネルギーを考える

5

積分を求める

既出の積分

$$I_0 = \frac{(1-h^2)^{\frac{3}{2}}}{4h\omega_d} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \leftarrow (3.20)$$

$$I_2 = \frac{1-h^2}{4\omega_d} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 - 2\sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \leftarrow (3.26)$$

式(4.3)第2行を求める

$$\begin{aligned}
 -\frac{2h^2}{1-h^2} \cdot I_0 + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} I_2 &= \frac{2h^2}{1-h^2} \cdot \frac{(1-h^2)^{\frac{3}{2}}}{4h\omega_d} = \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{1-h^2}{4\omega_d} = \\
 &= \frac{h}{2\omega_0} \hspace{15em} \omega_d = \sqrt{1-h^2} \omega_0 \\
 &= e^{-2h\omega_0 t} \sin^2 \omega_d t \hspace{15em} (4.4)
 \end{aligned}$$

振動系に蓄積・吸収されるエネルギーを考える

6

蓄積エネルギー + 吸収エネルギー

(4.4)を(4.3)に戻して、

$$\begin{aligned}
 E[\varepsilon_D] &= m\pi S_0 \left\{ \underbrace{t + \frac{1}{2h\omega_0} e^{-2h\omega_0 t} - \frac{1}{2h\omega_0}}_{\text{第1行}} + \underbrace{\frac{h}{\omega_0(1-h^2)} e^{-2h\omega_0 t} \sin^2 \omega_d t}_{\text{第2行}} \right\} \\
 &= m\pi S_0 t - \frac{m\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{(1-h^2)} \sin^2 \omega_d t \right) \right\} \text{減衰吸収エネルギー} \hspace{5em} (4.5)
 \end{aligned}$$

$$E[\varepsilon_V] = \frac{m\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t \right) \right\} \text{運動+弾性歪みエネルギー} \hspace{5em} (4.1)$$

式(4.1)+式(4.5)より、

$$E[\varepsilon_D] + E[\varepsilon_V] = \hspace{15em} (4.6)$$

質量とパワースペクトル密度だけで決まる

粘弾性系に蓄積吸収されるエネルギーは剛性や減衰の影響を受けない

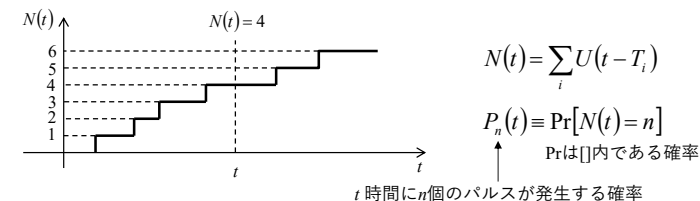
7

非線形領域や多自由度系の入力エネルギーは？

- ◆ 吸収エネルギーの側からのアプローチ（前頁までのアプローチ）
 - ◇ 任意の非線形履歴の蓄積 + 吸収エネルギーの期待値を求めることはできそうにない
 - ◇ 多自由度系の蓄積 + 吸収エネルギーの期待値を求めることも難しそう
- ◆ 蓄積吸収エネルギー = 入力エネルギーだから、振動系への入力エネルギーの側からアプローチしてみる
 - ◇ 準備作業として、ホワイトノイズをショットノイズでモデル化

ポアソン過程

- ◆ ポアソン過程：ある時点の事象が、次の事象の発生に影響を与えない確率過程
- ◆ ポアソン分布：ショットノイズで言えば、時間 t 内にパルスが何回発生するか



- ◆ (定常) ポアソン過程の仮定
 - ◇ 到着率 λ が一定
 - ◇ 独立到着
 - ◇ 同時到着無視

ポアソン分布：到着数0の場合

漸化式： $\Pr[N(t) = n] = P_n(t)$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) \quad (4.7)$$

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) + P_{i-1}(t) \lambda \Delta t \quad (4.8)$$

右辺第1項を移項して、 Δt で除して $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (4.9)$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \quad (4.10)$$

式(4.9)の解は、

$$P_0(t) = C_0 e^{-\lambda t} \quad (4.11)$$

$P_0(0) = 1$ より $C_0 = 1$ 、よって

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{指数分布：時刻 } t \text{ に故障がゼロの確率} \quad (4.12)$$

ポアソン分布：到着数*i*の場合

下式(4.10)を定数変化法で解く

$$\frac{dP_i(t)}{dt} + \lambda P_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) \quad \text{再出} \quad (4.10)$$

$P_i' + \lambda P_i = 0$ の解は

$$P_i = A \cdot e^{-\lambda t} \quad (4.13)$$

$P_i = A(t) \cdot e^{-\lambda t}$ として式(4.10)に代入すると

$$A' e^{-\lambda t} - \lambda A e^{-\lambda t} + \lambda A e^{-\lambda t} = \lambda P_{i-1}(t) \rightarrow A' = \lambda e^{\lambda t} P_{i-1}(t) \quad (4.14)$$

よって、

$$A = \int \lambda e^{\lambda t} P_{i-1}(t) dt + C_i \quad (4.15)$$

これを式(4.13)に代入して、

$$P_i(t) = \left(\int \lambda e^{\lambda t} P_{i-1}(t) dt + C_i \right) e^{-\lambda t} \quad (4.16)$$

ポアソン分布

$P_i(t) = \left(\int \lambda e^{\lambda t} P_{i-1}(t) dt + C_i \right) e^{-\lambda t}$ の係数を定める

$i=1$ の場合、 $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ (4.12)

$$P_1(t) = \left(\int \lambda e^{\lambda t} P_0(t) dt + C_1 \right) e^{-\lambda t} = (\lambda t + C_1) e^{-\lambda t}$$

$P_1(0) = C_1 = 0$ より

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$i=2$ の場合、

$$P_2(t) = \left(\int \lambda e^{\lambda t} \lambda t e^{-\lambda t} dt + C_2 \right) e^{-\lambda t}$$

$$= \left(\lambda^2 \frac{t^2}{2} + C_2 \right) e^{-\lambda t}$$

$P_2(0) = C_2 = 0$ より、

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

以上より一般的に

$$P_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \quad (4.17)$$

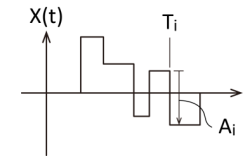
ショットノイズ

ホワイトノイズは、定常到着するショットノイズとして表すことができる。

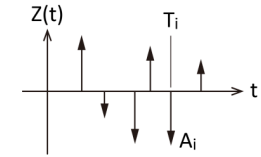
まず、次式で表されるステップ過程について考える。

$$X(t) = \sum_{i=1}^n A_i \mathbb{1}_{[T_i, \infty)}(t) \quad (4.18)$$

A_i は実数の確率変数である。ショットノイズは、ステップ過程の微分で与えられる。



ステップ過程



ショットノイズ

ステップ過程Xの期待値

ステップ過程 $X(t)$ の期待値

$$E[X(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X(t) | N(t) = n] \Pr(N(t) = n) \quad (4.19)$$

条件付き確率 n個到着する確率

ここで、まず $N(t) = n$ の場合を考える

$$E[X(t) | N(t) = n] = E[A_1 + A_2 + \dots + A_n] = n E[A] \quad (4.20)$$

よって、

$$E[X(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_i(N(t) = n) \quad (4.21)$$

ここで定常到着 (Poisson到着) を仮定すると、

$$E[X(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (4.22)$$

ここで、 λ は単位時間あたりの到着率

メモ：到着数の期待値

ステップの起こる回数 n が常に一定で、単位時間の発生回数を λ とすると、

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_i(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n=0$ は期待値に寄与しないので割愛 $= \lambda t$ 数学公式II, p.141 Taylor展開
 (直感的には自明) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

ステップ過程の自己相関 (1)

自己相関関数

独立ではない: $X(t_2)$ は、 $t_1 (< t_2)$ 以前の $X(t_1)$ の値に依存する

$$\begin{aligned} \phi(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1)) + X(t_1)^2] \\ &= E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] + E[X(t_1)^2] \end{aligned} \quad (4.23)$$

独立

式(4.23)右辺第1項

$$\begin{aligned} &E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1)) | N(t_2) = n, N(t_1) = n] \Pr(N(t_2) = n, N(t_1) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X(t_1) | N(t_2) = n, N(t_1) = n] \cdot E[(X(t_2) - X(t_1)) | N(t_2) = n, N(t_1) = n] \Pr(N(t_2) = n, N(t_1) = n) \\ &= E[A] \cdot E[A] \quad \leftarrow X(t_1) \text{ については } t_2 - t_1 \text{ の区間の到着数は無関係なので} \right. \\ &= E[A]^2 \lambda^2 t_1(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (4.24)$$

ステップ過程の自己相関 (2)

式(4.23)右辺第2項は、

$$E[X(t_1)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X(t_1)^2 | N(t_1) = n] P_r(N(t_1) = n) \quad (4.25)$$

ここで、まず $N(t) = n$ の場合を考える

$$E[X(t_1)^2 | N(t) = n] = E[(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2] \quad (4.26)$$

$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$ $X = A_1 + \dots + A_n$
 n 個の独立した確率変数の和 X の分散は $n\sigma_{A_i}^2$
 平均は $n\mu_{A_i}$

よって、

$$E[X(t_1)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} [n\sigma_{A_i}^2 + n^2 E[A_i]^2] P_r(N(t) = n) \quad (4.27)$$

$$\sigma_{A_i}^2 = E[A_i^2] - E[A_i]^2 = \sigma_A^2 \lambda t_1 + E[A_i]^2 (\lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1)$$

メモ: n^2 の期待値

$$E[N(t)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda t$$

$$= (\lambda t)^2 + \lambda t$$

式(4.24), (4.27) を式(4.23) に代入して、

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[A^2] \lambda t_1 + E[A]^2 \lambda^2 t_1 t_2 \quad t_2 > t_1 \quad (4.28)$$

ステップ過程の特性

16

ショットノイズの期待値

ショットノイズを式(4.18)で表されるステップ過程の微分で与える。

$$Z(t) = \frac{d}{dt} X(t) = \sum_i A_i \delta(t - T_i) \quad (4.29) \quad \leftarrow X(t) = \sum_i A_i \cdot U(t - T_i) \quad (4.18)$$

ショットノイズの期待値は、

$$E[Z(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)] \quad \leftarrow E[X(t)] = E[A] \lambda t \quad (4.22)$$

$$= \frac{d}{dt} \{E[A] \lambda t\}$$

$$= E[A] \lambda \quad (4.30)$$

ステップ過程を微分する

17

ショットノイズの自己相関の期待値

ステップ過程の自己相関

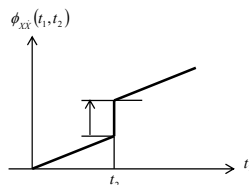
$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} E[A^2] \lambda t_1 + E[A]^2 \lambda^2 t_1 t_2 & t_2 > t_1 \\ E[A^2] \lambda t_2 + E[A]^2 \lambda^2 t_1 t_2 & t_2 < t_1 \end{cases} \quad (4.28)$$

t_2 で微分

$$\frac{d\phi_{xx}(t_1, t_2)}{dt_2} = E[X(t_1) \dot{X}(t_2)] = \phi_{xx}(t_1, t_2) \quad (4.31)$$

$$= \begin{cases} E[A]^2 \lambda^2 t_1 & t_2 > t_1 \\ E[A^2] \lambda + E[A]^2 \lambda^2 t_1 & t_2 \leq t_1 \end{cases}$$

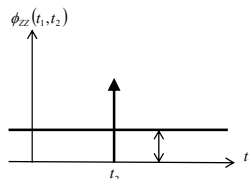
t_2 での増分



さらに t_1 で微分

$$\frac{d\phi_{xx}(t_1, t_2)}{dt_1} = \phi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{zz}(t_1, t_2) \quad (4.32)$$

$$= E[A]^2 \lambda^2 + E[A^2] \lambda \delta(t_1 - t_2)$$



ステップ過程を微分する

18

ショットノイズのパワースペクトル密度

ショットノイズは定常過程なので、自己相関関数は、

$$R_{zz}(\tau) = E[A]^2 \lambda^2 + E[A^2] \lambda \delta(\tau) \quad (4.33)$$

そのパワースペクトル密度は、

$$S_{zz}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [E[A]^2 \lambda^2 + E[A^2] \lambda \delta(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= E[A]^2 \lambda^2 \delta(\omega) + \frac{E[A^2] \lambda}{2\pi} \quad (4.34)$$

$E[A] = 0$ ならば、 $E[A^2] \neq 0$ ならば、 $\omega = 0$ すなわち直流成分が追加されることを表す

$$S_{zz}(\omega) = \frac{E[A^2] \lambda}{2\pi} \quad (4.35)$$

以上より、各ショットの振幅の期待値が0で、**Poisson到着 (定常到着) するショットノイズはホワイトノイズであることが証明された。**

ショットノイズの周波数特性

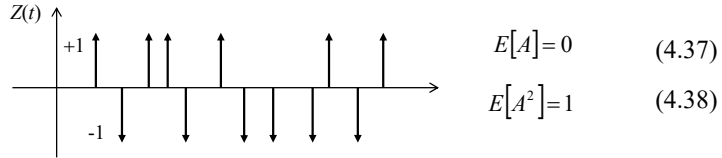
19

ショットノイズを受ける非線形1自由度系

地動加速度 $Z(t)$ を受ける, 非線形復元力特性 $g(Y, \dot{Y})$ を持つ 1 自由度系の運動方程式は,

$$m\ddot{Y}(t) + g(Y, \dot{Y}) = mZ(t) \quad (4.36)$$

地動加速度 $Z(t)$ が, 各パルスが $\delta(t)$ のショットノイズで与えられるとする。



1 個のインパルスによる運動量増分

インパルスは作用時間が無限小であることから、インパルスの作用中は質量の反作用が無限大になり、有限の復元力や減衰力に対して卓越することから、これらの力の影響を考慮する必要がなくなる。

そのため、1 個の単位インパルスに対する運動量の増分は、以下のように入れられる。

$$\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} m\delta(t)dt}_{\text{力積}} = \underbrace{m\Delta\dot{Y}}_{\text{運動量の増分}} \quad (4.39)$$

振動系の入力エネルギーの期待値

1 個のパルスによる運動エネルギーの増分は,

$$\Delta T = \frac{m}{2} [(\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2 - \dot{Y}^2] = \frac{m}{2} [2\dot{Y}\Delta\dot{Y} + \Delta\dot{Y}^2] \quad (4.40)$$

1 個のパルスによる運動エネルギーの増分の期待値は,

$$E[\Delta T] = \frac{m}{2} E[2\dot{Y}\Delta\dot{Y} + \Delta\dot{Y}^2] = \underbrace{mE[\dot{Y}]}_{=0} \underbrace{E[\Delta\dot{Y}]}_{=0} + \frac{m}{2} E[\Delta\dot{Y}^2] = \frac{m}{2} E[\Delta\dot{Y}^2] \quad (4.41)$$

無相関

$E[A^2]=1$ のとき, パルスの到着率は式(4.35)より $\lambda=2\pi S_0$ であることから, 単位時間あたりの運動エネルギーの増加率の期待値は,

$$\Delta T = \quad (4.42) \quad (\text{Karnopp 1967})$$

これは, エネルギー保存の法則から当然のことであるが, 式(4.6)で求めた粘弾性系の蓄積・吸収エネルギーと一致している (エネルギーバランス)。

また, 式(4.42)は非線形の場合も成り立つから, 入力エネルギーは振動系の特性に依存しないことが分かる。

振動系の入力エネルギーの分散

1 個のパルスによる入力エネルギーの分散は,

$$V[\Delta T] = E[(\Delta T - E[\Delta T])^2] = m^2 E\left[\left(\dot{Y}\Delta\dot{Y} + \frac{\Delta\dot{Y}^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

(4.39)より, $\Delta\dot{Y} = \pm 1$ であることから,

$$V[\Delta T] = m^2 E\left[\left(\dot{Y}\Delta\dot{Y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2\right] = m^2 E[\dot{Y}^2 \Delta\dot{Y}^2] = m^2 E[\dot{Y}^2] E[\Delta\dot{Y}^2] = m^2 \sigma_{\dot{Y}}^2 \quad (4.43)$$

到着率 $\lambda=2\pi S_0$ を考慮すると, 単位時間あたりでは,

$$V[\Delta T] = 2\pi S_0 m^2 \underbrace{\sigma_{\dot{Y}}^2}_{\text{速度の分散に比例する}} \quad (4.44)$$

入力エネルギーに関する証明は, 系が非線形の場合であっても多自由度系であっても成立する

補足（時間があれば）

一確定論的な振動論におけるエネルギーバランサー

運動方程式のエネルギー積分

以下は、加藤・秋山（1975）初出

ここで、一般的に振動解析に戻って、エネルギー入力を考えてみる。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + g(y) = -m\ddot{x} \quad (5.14)$$

両辺に $dy = \dot{y} dt$ を乗じて、地震動の全継続時間 t_0 にわたって積分すると、

$$m \int_0^{t_0} \ddot{y} \dot{y} dt + c \int_0^{t_0} \dot{y}^2 dt + \int_0^{t_0} g(y) \dot{y} dt = -m \int_0^{t_0} \ddot{x} \dot{y} dt \quad (5.15)$$

となる。

左辺第1項を部分積分を適用すると、

$$m \int_0^{t_0} \ddot{y} \dot{y} dt = m [\dot{y}^2]_0^{t_0} - m \int_0^{t_0} \dot{y} \ddot{y} dt$$

となるので、これを式 (5.14) に代入すると、

$$\frac{1}{2} m \dot{y}(t_0)^2 + c \int_0^{t_0} \dot{y}^2 dt + \int_0^{t_0} g(y) \dot{y} dt = -m \int_0^{t_0} \ddot{x} \dot{y} dt \quad (5.16)$$

25

総入力エネルギー

$$\frac{1}{2} m \dot{y}(t_0)^2 + c \int_0^{t_0} \dot{y}^2 dt + \int_0^{t_0} g(y) \dot{y} dt = -m \int_0^{t_0} \ddot{x} \dot{y} dt \quad (5.16 \text{再掲})$$

式(4.16)の各項に名称をつけて、意味を書き下すと以下のようになる。

$$W_e + W_h + W_p = E \quad (5.16)'$$

$$\begin{cases} W_e = \frac{1}{2} m \dot{y}(t_0)^2 & \text{: 地震終了時の運動エネルギー} \\ W_h = c \int_0^{t_0} \dot{y}^2 dt & \text{: 減衰による消費される累積エネルギー} \\ W_p = \int_0^{t_0} g(y) \dot{y} dt & \text{: 非線形履歴により消費される累積エネルギー} \\ E = -m \int_0^{t_0} \ddot{x} \dot{y} dt & \text{: 地震外乱による系へのエネルギー入力の総量} \end{cases}$$

式(5.16)は、地震外乱のなす仕事は、系の内部で消費される累積エネルギーと地震終了時の運動エネルギーと等しいことを表している。

26

エネルギースペクトル V_E

エネルギー入力の総量 E を、次式により速度に換算したものを等価速度 V_E と呼ぶ。

$$W_e + W_h + W_p = E \quad (5.16)'$$

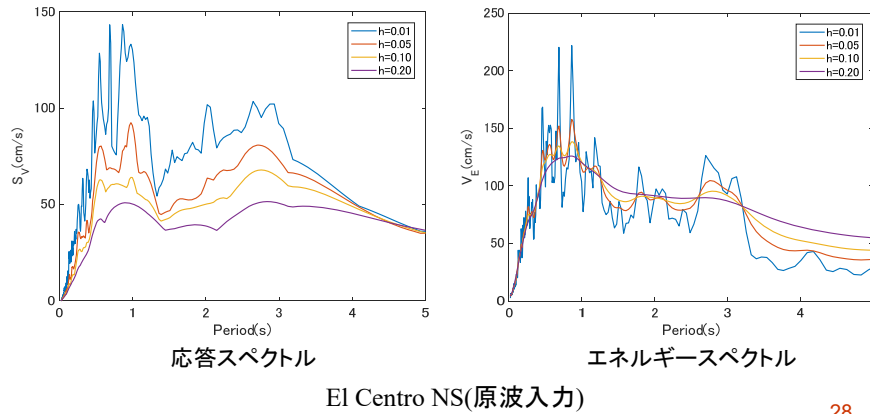
$$V_E = \sqrt{2E/m} \quad (5.17)$$

周期を横軸にとりて V_E を並べたものを エネルギースペクトル と呼ぶ。

27

減衰とエネルギースペクトル V_E

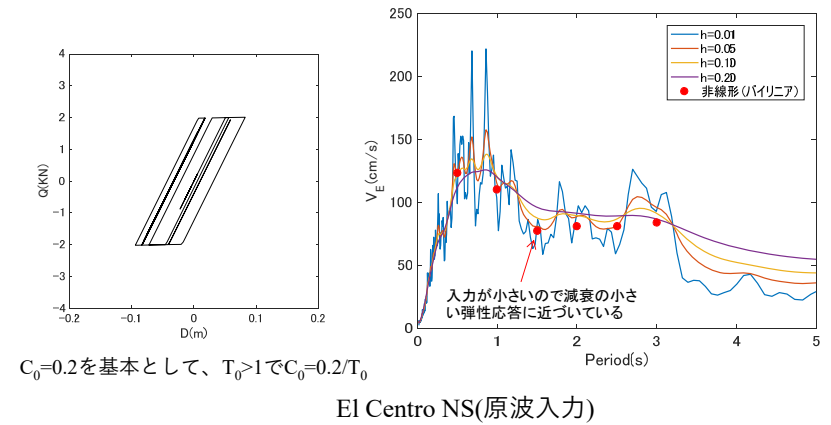
- ◆ 速度応答スペクトル S_V は、減衰が大きくなると小さくなる（左図）
- ◆ エネルギースペクトル V_E は、減衰が大きくなる平滑化されるが、全体的なレベルは変化しない（右図）



28

非線形性とエネルギースペクトル

- ◆ 非線形の場合も、エネルギースペクトルは平滑化した弾性応答とほぼ一致する



29

$h=0$ の速度応答

インパルスに対する速度応答

$$h_y(t) = \frac{1}{m} e^{-h\omega_d t} \left(\cos \omega_d t - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$h=0$ とし、負号を省略すると速度応答は次式で与えられる。

$$\dot{y}(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 (t-\tau) d\tau \quad (5.18)$$

これを展開すると、次のような表現が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \cos \omega_0 t \int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau + \sin \omega_0 t \int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \\ &= \sqrt{\left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \right]^2} \cos \omega_0 (t-\phi) \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{\int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau}{\int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

30

$h=0$ の速度応答スペクトルとフーリエスペクトル

$h=0$ の速度応答スペクトルは、

$$\begin{aligned} S_{V,h=0}(\omega_0) &= \sqrt{\left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \right]^2} \underbrace{\cos \omega_0 (t-\phi)}_{\text{振幅1}} \Big|_{\text{max}} \\ &= \sqrt{\left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \right]^2} \quad (5.20) \end{aligned}$$

一方、地動加速度のフーリエスペクトルは次式で与えられる。

$$F_{\ddot{x}}(\omega) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (5.21)$$

フーリエ振幅スペクトルは次式のように表せる。

$$|F_{\ddot{x}}(\omega)| = \sqrt{\left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{x}(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \right]^2} \quad (5.22)$$

したがって、フーリエ振幅と $h=0$ の速度応答スペクトルはほぼ等しい。

$$S_{V,h=0}(\omega_0) \approx F_{\ddot{x}}(\omega) \quad \text{重要} \quad (5.23)$$

31

エネルギースペクトルとフーリエ振幅

$h=0$ のとき、式(4.16)'のエネルギー積分において $W_h=W_p=0$ となるので、

$$W_{e,h=0} = E_{h=0} \quad (5.24)$$

これらをエネルギーに変換した V_E と S_V も等しい。

$$V_{e,h=0} = S_{V,h=0} \quad (5.25)$$

一方、 $h=0$ の S_V は、地動加速度のフーリエ振幅と近似的に等しいことも分かっている。また、エネルギースペクトル V_E は減衰や履歴により平滑化の度合いは変わるが振幅はほとんど変化しないことが知られている。以上より、

$$\tilde{V}_E \approx \tilde{F}_{\ddot{x}} \quad \text{重要} \quad (5.26)$$

を得る※。式(5.16'~17)を使うと（以下再掲）、エネルギースペクトルは振動系の応答が求まってからでなければ計算できないが、式(5.26)によれば、地震動のフーリエ振幅から直接求められることになる。

$$E = \int_0^t \ddot{x} \dot{y} dt \quad V_E = \sqrt{2E/m} \quad (5.16' \sim 17)$$

← 応答が必要

※ この証明は、スペクトル特性には制約されないが、線形であることが条件となる。減衰や非線形の場合については経験則となる。

32

ランダム振動論による総入力エネルギー

ランダム振動論によると、地動加速度がホワイトノイズの場合は、地震動の継続時間 t に入力される総入力エネルギーは次式で与えられる。

$$E = m\pi S_0 t \quad (5.27)$$

パワースペクトル密度とフーリエ振幅の関係

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi t} E \left[|F_x(\omega)|^2 \right] \quad (2.21)$$

式(5.17),(5.27),(2.21)より、

$$V_E = \sqrt{2E/m} = \sqrt{2\pi S_0 t} = E \left[|F_{\ddot{x}}|^2 \right]^{1/2} \quad (5.28)$$

以上より、ランダム振動の観点からも、エネルギースペクトルはフーリエ振幅の期待値に等しいことが示されている※。

※ ランダム振動論では、ホワイトノイズであることが条件となるが、線形・非線形に係わらず厳密に証明することができる

33