

都市防災工学

第3回：時間領域の定常・非定常ランダム応答

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
 岡野 創
<http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html>

講義予定

1. 導入・確率過程の基礎：2019年12月4日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2019年12月11日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2019年12月18日
4. エネルギーバランス：2019年12月25日
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年1月8日
6. ランダムウォークと残留変形：2020年1月15日
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性：2020年1月22日
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2020年1月29日

第3回の講義内容

- ◆ 確定波形に対する入出力関係の復習・整理
- ◆ 確率過程の入出力関係
- ◆ 1自由度系の応答
 - ◇ 定常ランダム応答
 - ◇ 非定常ランダム応答

入出力関係（「振動工学」の復習・整理）

確率過程の入出力関係に入る前に、確定波形の入出力関係を整理する
 入力調和波の足しあわせで与えられる場合：

$$\begin{cases} X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} \xrightarrow{e^{i\omega t}} \begin{array}{c} \text{線形系} \\ H(\omega) e^{i\omega t} \end{array} Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.1)$$

入力がインパルスの足しあわせで与えられる場合：

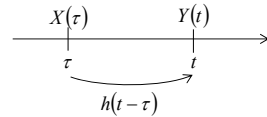
$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \xrightarrow{\delta(t)} \begin{array}{c} \text{線形系} \\ h(t) \end{array} Y(t) = \int_{-\infty}^t X(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

コンボリューション

式(3.1)より

| | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|--|----|----|---|------|---|---|------|------|
| $Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega$ $= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau$ | 周波数領域 ↓ 時間領域 | <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">入力</td> <td style="text-align: center;">出力</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">H(ω)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">⇕</td> <td style="text-align: center;">⇕</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">δ(t)</td> <td style="text-align: center;">h(t)</td> </tr> </table> | 入力 | 出力 | 1 | H(ω) | ⇕ | ⇕ | δ(t) | h(t) |
| 入力 | 出力 | | | | | | | | | |
| 1 | H(ω) | | | | | | | | | |
| ⇕ | ⇕ | | | | | | | | | |
| δ(t) | h(t) | | | | | | | | | |
| 式(3.2)と比べる | ↑ | 後で使う | | | | | | | | |

確率過程の入出力関係 (復習)



応答 $Y(t)$ の期待値

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^t X(\tau) h_Y(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^t E[X(\tau)] h_Y(t-\tau) d\tau \quad (3.4)$$

応答 $Y(t)$ の自己相関関数

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t+\pi)] &= E\left[\int_{-\infty}^t X(\tau_1) h_Y(t-\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{t+\pi} X(\tau_2) h_Y(t+\pi-\tau_2) d\tau_2\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^0 X(t-u_1) h_Y(u_1) du_1 \int_{-\infty}^0 X(t+\pi-u_2) h_Y(u_2) du_2\right] \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E[X(t-u_1)X(t+\pi-u_2)] h_Y(u_1) h_Y(u_2) du_1 du_2 \end{aligned}$$

入力 $X(t)$ が定常ならば、

t に無関係に時間差のみ取る

$$E[Y(t)Y(t+\pi)] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau) h_Y(u_1) h_Y(u_2) du_1 du_2 \quad (3.5)$$

4

確率過程の入出力関係(復習)

出力のパワースペクトル密度関数 (暗に定常過程を考えている)

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.5) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau+u_1-u_2) h_Y(u_1) h_Y(u_2) e^{-i\omega\tau} du_1 du_2 d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{XX}(u) h_Y(u_1) h_Y(u_2) e^{-i\omega(\tau+u_1-u_2)} du_1 du_2 d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} h_Y(u_1) e^{i\omega u_1} du_1 \int_0^{\infty} h_Y(u_2) e^{-i\omega u_2} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(u) e^{-i\omega u} du \\ &= H_Y^*(\omega) H_Y(\omega) S_{XX}(\omega) \end{aligned}$$

よって、

$$(3.6)$$

5

1自由度系の定常ランダム応答(1)

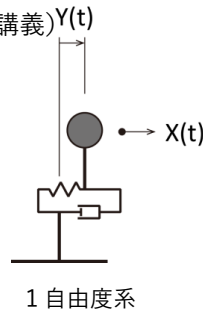
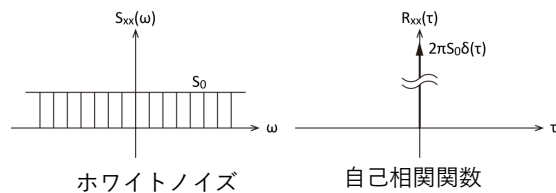
ここから、具体的に粘弾性 1 自由度系の応答を考える。入力は定常確率過程 $X(t)$ が作用し続けるものとし、応答 $Y(t)$ も定常とする。応答の自己相関関数は (式(3.5)を再掲)、

$$R_{YY}(\tau) = E\left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau+u_1-u_2) h_Y(u_1) h_Y(u_2) du_1 du_2\right] \quad (3.7)$$

さらに、**入力はホワイトノイズと仮定**する。

ホワイトノイズについては次式が成り立つ。(第2回講義)

$$R_{XX}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (2.9)$$



6

1自由度系の定常ランダム応答(2)

衝撃応答関数は、

$$h_Y(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-h\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad t \geq 0 \quad \omega_d = \sqrt{1-h^2} \omega_0 \quad (3.8)$$

式(2.9), (3.8)を式(3.5)に代入して、

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi S_0 \delta(\tau+u_1-u_2) \cdot \frac{1}{(m\omega_d)^2} e^{-h\omega_0 u_1} \sin \omega_d u_1 \cdot e^{-h\omega_0 u_2} \sin \omega_d u_2 du_1 du_2 \\ &= \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{2\pi S_0}{(m\omega_d)^2} e^{-h\omega_0(\tau+u_2)} \sin \omega_d(\tau+u_2) \cdot e^{-h\omega_0 u_2} \sin \omega_d u_2 du_2 & u_2 \geq \tau \\ 0 & u_2 < \tau \end{cases} \\ &= \frac{2\pi S_0}{(m\omega_d)^2} \int_{\max(\tau, 0)}^{\infty} e^{-h\omega_0(2u_2-\tau)} \sin \omega_d(u_2-\tau) \sin \omega_d u_2 du_2 \quad (3.9) \end{aligned}$$

次頁へ

7

1自由度系の定常ランダム応答(3)

式(3.8)の積分を三角関数の積和の公式で展開すると、

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-h\omega_0(2u_2-\tau)} \sin \omega_d(u_2 - \tau) \sin \omega_d u_2 du_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} e^{-h\omega_0(2u_2-\tau)} \{\cos \omega_d \tau - \cos \omega_d(2u_2 - \tau)\} du_2 \quad (3.10)$$

第1項

$$\frac{1}{2} e^{h\omega_0 \tau} \cos \omega_d \tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-2h\omega_0 u_2} du_2 = \frac{1}{4h\omega_0} e^{-h\omega_0 \tau} \cos \omega_d \tau \quad (3.11)$$

第2項

$$-\frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} e^{-h\omega_0(2u_2-\tau)} \cos \omega_d(2u_2 - \tau) du_2 = -\frac{1}{4} \int_{\tau}^{\infty} e^{-h\omega_0 t'} \cos \omega_d t' dt' \quad (3.12)$$

数学公式集I, p.214: $\int_{\tau}^{\infty} e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx]$

8

1自由度系の定常ランダム応答(4)

式(3.11), (3.12)を式(3.9)に戻すと、次式が得られる。

$$R_{YY}(\tau) = \frac{\pi S_0}{2hm^2 \omega_0^3 (1-h^2)} e^{-h\omega_0 \tau} \left\{ (1-h^2) \cos \omega_d \tau + \frac{h}{\omega_0} \omega_d \sin \omega_d \tau \right\} = \frac{\pi S_0}{2hm^2 \omega_0^3} e^{-h\omega_0 \tau} \left\{ \cos \omega_d \tau + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \tau \right\} \quad (3.13)$$

振幅の標準偏差は、式(3.13)で $\tau=0$ とにおいて、以下のように与えられる。

$$\sigma_Y = \sqrt{R_{YY}(0)} = \quad (3.14)$$

標準偏差は、工学的に重要な最大応答値※を求める際の基本量であり、最大応答値の最も基本的な性質を表していると考えて良い。

※ 最大応答値の評価についてはLecture 5で扱う。

9

1自由度系の定常ランダム応答(5)：地震応答の場合

前頁までは、外力としてホワイトノイズが作用した場合の応答を求めた。地動加速度としてホワイトが作用する場合は、外力が $X(t) = -m \cdot \ddot{W}(t)$ と応答の自己相関関数と標準偏差は次のように与えられる。

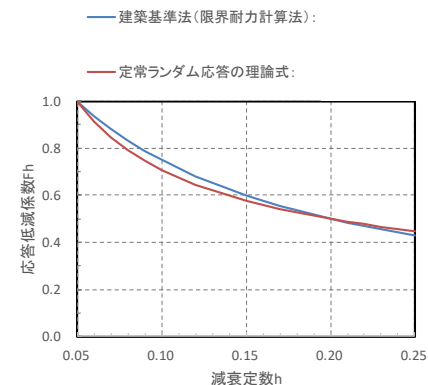
$$R_{YY}(\tau) = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3} e^{-h\omega_0 \tau} \left\{ \cos \omega_d \tau + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \tau \right\} \quad (3.15)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3}} \quad (3.16)$$

1自由度系の定常ランダム応答で重要な性質は、応答の標準偏差が $\sqrt{\frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3}}$ するという性質である。これが、粘性減衰が最大応答値に及ぼす第1因子となる。

限界耐力計算法の応答低減係数

◆ 減衰による応答スペクトルの低減係数 F_h



◆ 両者は概ね対応する

非定常ランダム応答

地動加速度が時刻 $t=0$ から突然作用する1自由度系の非定常ランダム応答を扱う。地動加速度はホワイトノイズとする*。

運動方程式は、

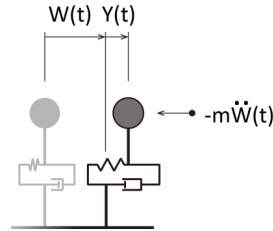
$$m\ddot{Y}(t) + c\dot{Y}(t) + kY(t) = -m \cdot U(t) \cdot \ddot{W}(t) \quad (3.17)$$

ここで、

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

変位応答は、

$$Y(t) = -\int_0^t m \cdot \ddot{W}(\tau) \cdot h_Y(t-\tau) d\tau \quad (4.18)$$



12

非定常ランダム応答：相対変位(1)

相対変位応答の分散

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2(t) &= E[Y^2(t)] \\ &= E\left[\int_0^t m \cdot \ddot{W}(\tau_1) \cdot h_Y(t-\tau_1) d\tau_1 \int_0^t m \cdot \ddot{W}(\tau_2) \cdot h_Y(t-\tau_2) d\tau_2\right] \\ &= \int_0^t \int_0^t m^2 E[\ddot{W}(\tau_1) \cdot \ddot{W}(\tau_2)] \cdot h_Y(t-\tau_1) \cdot h_Y(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^t \int_0^t 2\pi m^2 S_0 \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2) \cdot h_Y(t-\tau_1) \cdot h_Y(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^t 2\pi m^2 S_0 h_Y^2(t-\tau) d\tau \\ &= -2\pi m^2 S_0 \int_0^t h_Y^2(\tau) d\tau \\ &= 2\pi m^2 S_0 \int_0^t h_Y^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

13

非定常ランダム応答：相対変位(2)

衝撃応答関数(3.8)を(3.18)に代入して、

$$\sigma_Y^2(t) = \frac{2\pi S_0}{\omega_d^2} \int_0^t e^{-2h\omega_0\tau} \underbrace{\sin^2 \omega_d \tau}_{I_0} d\tau \quad (3.19)$$

積分 I_0 を取り出すと、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\omega_d} \int_0^{\omega_d t} e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\tau'} \sin^2 \tau' d\tau' \\ &= \frac{1}{\omega_d} \cdot \frac{1-h^2}{4} \left\{ e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\omega_d t} \left(-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin^2 \omega_d t - \sin 2\omega_d t - \sqrt{1-h^2}/h \right) + \sqrt{1-h^2}/h \right\} \\ &= \frac{1}{\omega_d} \cdot \frac{(1-h^2)^{3/2}}{4h} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

数学公式 I, p.214

$$\int e^{ax} \sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \left[a \cdot \sin^2 x - \sin 2x + \frac{2}{a} \right]$$

14

非定常ランダム応答：相対変位(3)

(3.20)を(3.19)に戻して、

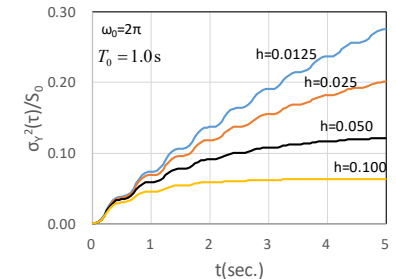
$$\sigma_Y^2(t) = \frac{\pi S_0}{2h \omega_0^3} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \quad (3.21)$$

$$\approx \frac{\pi S_0}{2h \omega_0^3} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\}$$

(3.16)：定常項

$h \ll 1$

良く出てくる形なので、覚えておくとよい



15

非定常ランダム応答：相対速度(1)

相対速度の分散

$$\sigma_{\dot{y}}^2(t) = 2\pi m^2 S_0 \int_0^t h_{\dot{y}}^2(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

相対速度の衝撃応答関数

$$h_{\dot{y}}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-h\omega_d t} \sin \omega_d t$$

$$h_{\dot{y}}(t) = \frac{1}{m} e^{-h\omega_d t} \left(\cos \omega_d t - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t \right) \quad t \geq 0 \quad (3.23)$$

(3.23)を(3.22)に代入して、

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{y}}^2(t) &= 2\pi S_0 \int_0^t e^{-2h\omega_d \tau} \left(\cos^2 \omega_d \tau - \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \tau \cos \omega_d \tau + \frac{h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d \tau \right) d\tau \\ &= 2\pi S_0 \left(I_1 - \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} I_2 + \frac{h^2}{1-h^2} \cdot I_0 \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

I_1, I_2 の積分を実行する (I_0 の積分は既出)

16

非定常ランダム応答：相対速度(2)

積分 I_1 ：

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\omega_d} \int_0^{\omega_d t} e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \tau'} \cos^2 \tau' d\tau' \quad \text{数学公式 I, p.214} \\ &= \frac{1}{\omega_d} \cdot \frac{1-h^2}{4} \left[e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \tau'} \left(-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cos^2 \tau' + \sin 2\tau' - \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \right) \right]_0^{\omega_d t} \\ &= \frac{1-h^2}{4\omega_d} \left\{ e^{-2h\omega_d t} \left(-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cos^2 \omega_d t + \sin 2\omega_d t - \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1-h^2}}{4h\omega_d} \left\{ 1+h^2 - e^{-2h\omega_d t} \left(2h^2 \cos^2 \omega_d t - h\sqrt{1-h^2} \sin 2\omega_d t + 1-h^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

17

非定常ランダム応答：相対速度(3)

積分 I_2 ：

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\omega_d} \int_0^{\omega_d t} e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \tau'} \sin \tau' \cos \tau' d\tau' \quad \text{数学公式 I, p.215} \\ &= \frac{1}{\omega_d} \cdot \frac{1-h^2}{4} \left[e^{-\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \tau'} \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\tau' - \cos 2\tau' \right) \right]_0^{\omega_d t} \\ &= \frac{1-h^2}{4\omega_d} \left\{ e^{-2h\omega_d t} \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t - \cos 2\omega_d t \right) + 1 \right\} \\ &= \frac{1-h^2}{4\omega_d} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_d t} \left(1 - 2\sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

18

非定常ランダム応答：相対速度(4)

(3.25),(3.26),(3.20)を(3.24)に代入して、

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{y}}^2(t) &= 2\pi S_0 \left(I_1 - \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} I_2 + \frac{h^2}{1-h^2} \cdot I_0 \right) \\ &= 2\pi S_0 \cdot \frac{\sqrt{1-h^2}}{4h\omega_d} \left\{ \left[1+h^2 - e^{-2h\omega_d t} \left(1+h^2 - 2h^2 \sin^2 \omega_d t - h\sqrt{1-h^2} \sin 2\omega_d t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2h^2 \left\{ 1 - e^{-2h\omega_d t} \left(1 - 2\sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h^2 \left\{ 1 - e^{-2h\omega_d t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

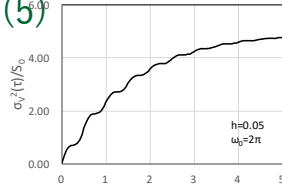
(次頁に続く)

19

非定常ランダム応答：相対速度(5)

相対速度の分散：

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{y}}^2(t) &= \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \left[(1+h^2-2h^2+h^2) \right. \\ &\quad \left. - e^{-2h\omega_0 t} \left\{ (1+h^2-2h^2+h^2) + \left(-2h^2+4h^2+\frac{2h^4}{1-h^2} \right) \sin^2 \omega_d t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-h\sqrt{1-h^2} - \frac{2h^3}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{h^3}{\sqrt{1-h^2}} \right) \sin 2\omega_d t \right\} \right] \\ &= \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{2h^2}{1-h^2} \sin^2 \omega_d t - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \quad (3.26) \\ &\approx \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} (1 - e^{-2h\omega_0 t}) \quad h \ll 1 \end{aligned}$$



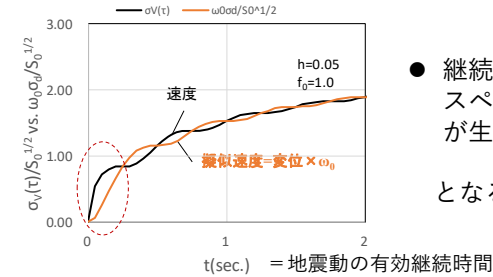
20

速度応答と擬似速度応答

h^2 の項を省略して変位と速度の解を比較すると、

$$\text{擬似速度 } \sigma_{\dot{y}}^2(t)\omega_0^2 = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \quad (3.21')$$

$$\text{真の速度 } \sigma_{\dot{y}}^2(t) \approx \frac{\pi S_0}{2h\omega_0} \left\{ 1 - e^{-2h\omega_0 t} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin 2\omega_d t \right) \right\} \quad (3.26')$$



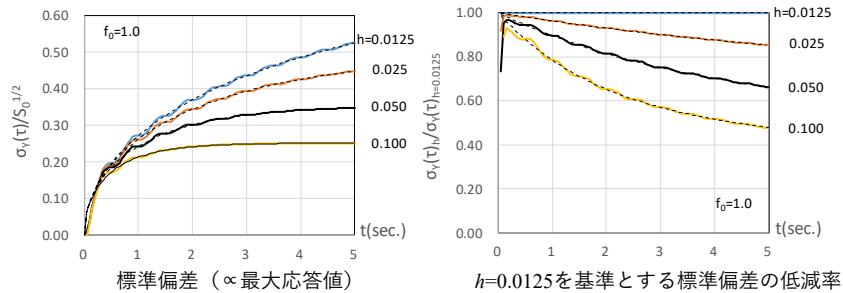
- 継続時間が短い地震では、応答スペクトルの長周期側で、差異が生じ、
擬似速度 < 速度応答 となる。

21

減衰の応答低減効果

図中黒破線は以下の近似解を示す

- ◆ 相対変位（変形）に対する減衰の応答低減効果 $\sigma_y(t) \approx \sqrt{\frac{\pi S_0}{2h\omega_0^3}} (1 - e^{-2h\omega_0 t})$



- ◆ 立ち上がり部では減衰による応答低減効果は小さく、継続時間が長くなるにつれて定常ランダム応答における低減効果 $1/\sqrt{h}$ に漸近する
 - ◇ 物理的には、定常ランダム振動では変位零近傍で速度最大となるが、応答の立ち上がり部では、変位零付近で速度も零であるため、減衰による低減効果が減ると解釈される
- ◆ 継続時間の短い（=パルスのな）地震動では、減衰の効果は減ずる

22