都市防災工学

第２回：確率過程の周波数特性と入出力関係

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
岡野　創
http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html

講義予定

1. 導入・確率過程の基礎：2020年11月25日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2020年12月2日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2020年12月9日
4. エネルギーバランス：2020年12月16日
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年12月23日
6. ランダムウォークと残留変形：2021年1月6日
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性:2021年1月20日
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2021年1月27日

パワースペクトル密度関数

確率過程の周波数特性は，パワースペクトル密度関数によって表される。パワースペクトル密度関数は自己相関関数のフーリエ変換として定義される。本講義では、パワースペクトル密度関数を次式で定義する。

$$\begin{cases} S_{XX}(\omega) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ R_{XX}(\tau) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{cases} \qquad (2.1)^{※}$$

$R_{XX}(\tau)$のフーリエ変換として定義されていることから分かるように，パワースペクトル密度関数では暗に定常過程を仮定している。

※　通常のフーリエ変換とは1/2πが付く側が異なることに注意。
Y.K.Lin:"Probabilistic Theory of Structural Dynamics"、日野幹雄:「スペクトル解析」などのテキストで用いられている。

パワースペクトル密度関数には別の定義もある

フーリエ変換は，以下のように定義されることが多い。

$$\begin{cases} F_X(\omega) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ X(t) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

これに合わせて，パワースペクトル密度を以下のように定義しているテキストもある（例えば、柴田明徳、大崎順彦）。

$$\begin{cases} S_{XX}(\omega) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ R_{XX}(\tau) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{cases} \qquad (2.1)'$$

どの定義を用いても良いが，定義により誘導される諸公式の係数が異なってくるので注意が必要。

パワースペクトル密度関数は実数

$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$に注意して、

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} R_{XX}(\tau)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)d\tau - \int_0^{-\infty} R_{XX}(\tau)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} R_{XX}(\tau)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)d\tau + \qquad\qquad\right]$$

$$= \qquad\qquad (2.2)$$

以上より，　　　　　　　　　　　　　　であることが分かる。

パワースペクトル密度関数は偶関数

式(2.1)で$-\omega$とおくと，

$$S_{XX}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

$\tau = -\tau'$とおいて，

$$S_{XX}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} R_{XX}(-\tau') e^{-i\omega\tau'} (-d\tau')$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau') e^{-i\omega\tau'} d\tau' = S_{XX}(\omega)$$

したがって，パワースペクトル密度関数は原点に対して対称である。

$$\boxed{S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)} \qquad (2.4)$$

パワースペクトル密度と波形の２乗振幅

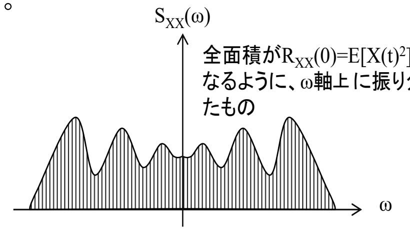
自己相関関数は，パワースペクトル密度をフーリエ逆変換として与えられる。

$$R_{XX}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \qquad \text{再掲} \quad (2.1)$$

式(2.1)でτ=0とおくと，

$$R_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(t)^2\right] = \qquad \text{パーセバルの定理} \quad (2.5)$$

式(2.5)は，パワースペクトル密度の全面積が時刻歴波形の２乗振幅の期待値になるように，ω軸上に振り分けたものであることを表している。



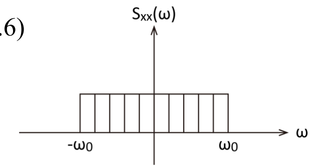
有帯域ホワイトノイズ

パワースペクトル密度関数が，次式で与えられる有帯域ホワイトノイズについて考える。

$$S_{XX}(\omega) = \{U(\omega+\omega_0) - U(\omega-\omega_0)\}\cdot S_0 \quad (2.6)$$

ここに，

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \qquad \text{ステップ関数}$$



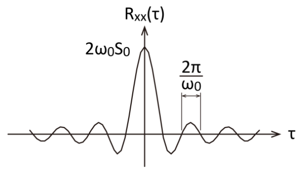
有帯域ホワイトノイズ

自己相関関数

$$R_{XX}(\tau) = S_0\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega\tau} d\omega = S_0\Big[\qquad\Big]_{-\omega_0}^{\omega_0}$$

$$= S_0\left[\frac{\cos\omega\tau + i\sin\omega\tau}{i\tau}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0}$$

$$= \qquad\qquad (2.7)$$



自己相関関数

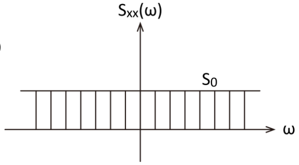
ホワイトノイズの自己相関関数

有帯域ホワイトノイズのバンド幅を広げてホワイトノイズについて考える。

$$R_{XX}(\tau) = 2S_0 \lim_{\omega_0 \to \infty} \left(\frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} \right) \qquad (2.8)$$

()内をτで積分すると（数学公式I, p.251），

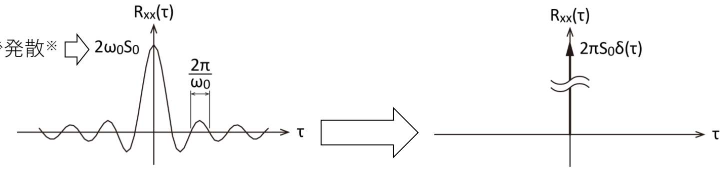
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} d\tau = \pi$$



ホワイトノイズ

つまり，τ=0で発散するが，積分は有限の値を持つ。

$\omega_0 \to \infty$で発散※



自己相関関数：ω_0有限　　$\omega_0 \to \infty$　　自己相関関数：$\omega_0 \to \infty$

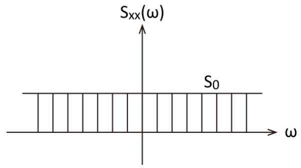
※ $\lim_{\tau \to 0} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(\omega_0 \tau - \frac{1}{3!} (\omega_0 \tau)^3 + \right) \approx \underbrace{\omega_0}_{\omega_0 \to \infty}$

ホワイトノイズの自己相関関数

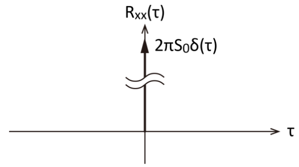
よって，ホワイトノイズの自己相関関数はδ関数となり，その積分値は$2\pi S_0$となる。

$$R_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(t)^2 \right]$$
$$= 2S_0 \lim_{\tau \to 0} \left[\lim_{\omega_0 \to \infty} \left(\frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} \right) \right] = \qquad (2.9)$$

ここで，$\delta(\tau)$はディラックのデルタ関数である。



ホワイトノイズ



自己相関関数

パワースペクトル密度関数とフーリエ振幅(1)

パワースペクトル密度関数は，フーリエ振幅を用いて表すことができる。（両者の関係は、後に建物へのエネルギー入力を考察する際にも必要になる重要な関係である。）

ここではまず，エルゴード性を仮定せずに，厳密な方法で導出する。以下のような周期的な確率過程を考える。

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{確率変数}} e^{in\omega_0 t} \qquad (2.10)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-in\omega_0 t} dt \qquad (2.11)$$

ここで，c_nは複素数の確率変数である。直交条件より，

$$\mathrm{E}\left[c_k c_n^* \right] = \begin{cases} \mathrm{E}\left[|c_n|^2 \right] & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \qquad (2.12)$$

パワースペクトル密度関数とフーリエ振幅(2)

自己相関関数

$$R_{XX}(\tau) = \mathrm{E}\left[X(t) X(t+\tau) \right]$$

実数だから共役をとっても変わらない

$$= \mathrm{E}\left[X(t)^* X(t+\tau) \right]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k^* c_n \; e^{-ik\omega_0 t} e^{in\omega_0 (t+\tau)} \qquad (2.13)$$

直交条件

$$=$$

式(2.1)に代入して（ただし区間を－$T/2$～$T/2$に変更）

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[|c_n|^2 \right] e^{in\omega_0 \tau} e^{-i\omega\tau} d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[|c_n|^2 \right] \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n\omega_0 - \omega)\tau} d\tau \qquad (2.14)$$

パワースペクトル密度関数とフーリエ振幅(3)

（前頁に続く）τに関する積分を取り出して，

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n\omega_0-\omega)\tau}d\tau \overset{\omega'=n\omega_0-\omega}{=} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega'\tau}d\tau = \left[\frac{e^{i\omega'\tau}}{i\omega'}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\sin\frac{T}{2}\omega'}{\omega'} \qquad (2.15)$$

右辺をω'に関して積分すると（積分公式は既出でτからω'の積分になっている），

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin T\omega'/2}{\omega'}d\omega' = 2\pi$$

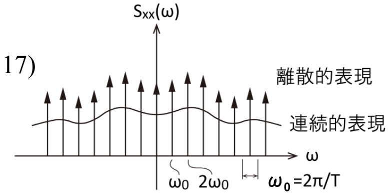
$T\to\infty$でデルタ関数と見なせて，

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[|c_n|^2\right]\frac{2\sin T\omega'/2}{\omega'} \overset{\omega'=n\omega_0-\omega}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[|c_n|^2\right]\delta(n\omega_0-\omega) \qquad (2.16)$$

パワースペクトル密度関数とフーリエ振幅(4)

（前頁に続く）

$$\underbrace{S_{XX}(\omega)}_{離散表現} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[|c_n|^2\right]\delta(n\omega_0-\omega) \qquad (2.17)$$



パワースペクトル密度関数の離散的表現と連続的表現

一方，パワースペクトル密度関数を連続的に表現すると、式(2.1)より，

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$\omega=n\omega_0$と置いて，両辺に$\omega_0=2\pi/T$を乗ずると，

$$\underbrace{S_{XX}(\omega)\omega_0}_{連続表現} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)e^{-in\omega_0\tau}d\tau \qquad (2.18)$$

式(2.17)の左辺と(2.18)の左辺の値は等しいことから，

$$\underbrace{S_{XX}(\omega)\omega_0}_{連続表現} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[|c_n|^2\right] \qquad (2.19)$$

パワースペクトル密度関数とフーリエ振幅(5)

（前頁に続く）

$$\underbrace{S_{XX}(\omega)\omega_0}_{連続表現} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[|c_n|^2\right] \overset{式(2.11)}{=} \frac{1}{T^2}E\left[\left|\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}X(t)e^{-i\omega_n t}dt}_{=フーリエ振幅の定義}\right|^2\right] \qquad (2.20)$$

両辺を$\omega_0=2\pi/T$で除して，

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi T}E\left[\left|F_X(\omega)\right|^2\right] \qquad \text{重要} \qquad (2.21)$$

式(2.21)では，パワースペクトル密度関数は，フーリエ振幅スペクトルの期待値の２乗を時間Tで除したものである。（Tで割らなければならないことを知らない人が多い）

2πは，パワースペクトル密度関数とフーリエ変換の定義における係数の違いによるもの。

エルゴード性を仮定した導出

エルゴード性が成立すると仮定して，自己相関関数を時間軸方向の期待値として定義すると、

$$R(\tau) \cong \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt \qquad (2.22)$$

自己相関関数をフーリエ変換すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt\,e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\qquad dt\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)\qquad d\tau \qquad (2.23)$$

$$= \frac{1}{T}F[x(t)]^*F[x(t)] = \frac{1}{T}\left|F[x(t)]\right|^2$$

よって，パワースペクトル密度関数は，

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\mathrm{E}\left[\left|F_X(\omega)\right|^2\right] \qquad (2.24)$$

以上のように，エルゴード性を仮定すると非常に簡単に導出できる。ただし，厳密な証明ではない。

クロススペクトル密度関数

クロススペクトル密度関数は，相互相関関数のフーリエ変換として定義される。

$$
\begin{cases}
S_{XY}(\omega) \equiv \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
R_{XY}(\tau) \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega
\end{cases}
\qquad (2.25)
$$

式(2.10)第１式でX,Yを入れ替えると，

$$
\begin{aligned}
S_{YX}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau =
\end{aligned}
$$

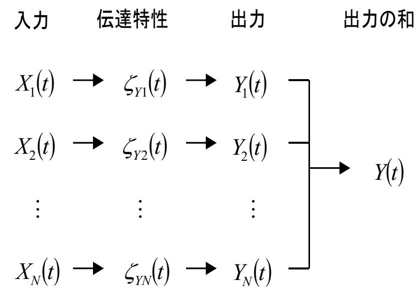
*は複素共役を表す

すなわち以下の関係が成立する。

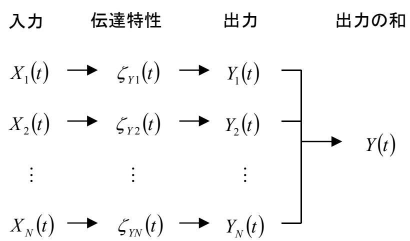
$$\boxed{S_{YX}(\omega) = S_{XY}(\omega)^*} \qquad \text{（エルミート形式）} \qquad (2.26)$$

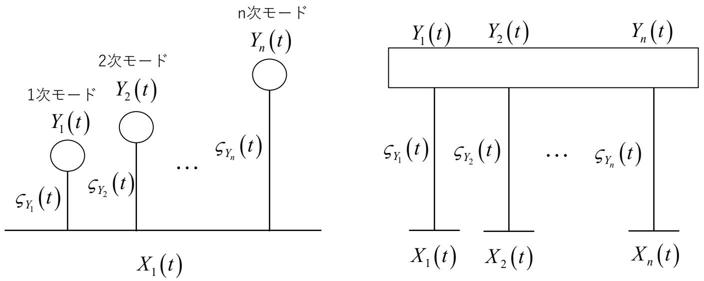
多入力１出力の入出力関係

- 以下の２ケースに対応する
  - 文字通り，構造物に多数の地震動が入力する場合（A）
  - 入力が共通の場合は、モーダルアナリシスによって構造物応答を求めている場合に相当する（B）

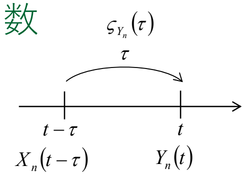


多入力１出力の入出力関係





多入力１出力の自己相関関数



n番目の１自由度系の応答は，

$$Y_n(t) = \int_0^{\infty} X_n(t-\tau)\zeta_{Y_n}(\tau)d\tau \qquad (2.27)$$

N個の１自由度系の和の期待値は，

$$\mathrm{E}[Y(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\infty} X_n(t-\tau)\zeta_{Y_n}(\tau)d\tau\right] = \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\infty} E[X_n(t-\tau)]\zeta_{Y_n}(\tau)d\tau \qquad (2.28)$$

N個の１自由度系の和の自己相関関数は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y(t)Y(t+\tau)] &= \mathrm{E}\left[\sum_k Y_k(t)\sum_n Y_n(t+\tau)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_k\sum_n \int_0^{\infty} X_k(t-u_1)\zeta_{Y_k}(u_1)du_1 \int_0^{\infty} X_n(t+\tau-u_2)\zeta_{Y_n}(u_2)du_2\right] \\
&= \sum_k\sum_n \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{E}[X_k(t-u_1)X_n(t+\tau-u_2)]\zeta_{Y_k}(u_1)\zeta_{Y_n}(u_2)du_1du_2
\end{aligned}
\qquad (2.29)
$$

多入力１出力のパワースペクトル密度

応答が定常ならば，

$$R_{YY}(\tau)=\sum_k\sum_n\int_0^\infty\int_0^\infty R_{X_kX_n}(\tau+u_1-u_2)\zeta_{Y_k}(u_1)\zeta_{Y_n}(u_2)du_1du_2 \qquad (2.30)$$

応答のパワースペクトル密度は，

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{YY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k\sum_n\int_0^\infty\int_0^\infty R_{X_kX_n}(\tau+u_1-u_2)\zeta_{Y_k}(u_1)\zeta_{Y_n}(u_2)du_1du_2e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_k\sum_n\int_0^\infty\zeta_{Y_k}(u_1)\qquad du_1\int_0^\infty\zeta_{Y_n}(u_2)\qquad du_2\int_{-\infty}^{\infty}R_{X_kX_n}(u)\qquad du \\ &=\sum_k\sum_n H_{Y_k}^*(\omega)H_{Y_n}(\omega)S_{X_kX_n}(\omega) \end{aligned} \qquad (2.31)$$

出力の和の２乗平均振幅

2乗平均応答は，

$$\begin{aligned} R_{YY}(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_{YY}(\omega)d\omega \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}H_{Y_k}^*(\omega)H_{Y_n}(\omega)S_{X_kX_n}(\omega)d\omega \end{aligned} \qquad (2.32)$$

簡単のため、N=2の場合について書き下してみると，

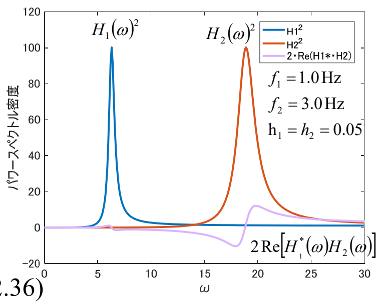
$$R_{YY}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{aligned}&H_{Y_1}{}^2(\omega)S_{X_1X_1}(\omega)+H_{Y_2}{}^2(\omega)S_{X_2X_2}(\omega)\\ &+H_{Y_1}{}^*(\omega)H_{Y_2}(\omega)S_{X_1X_2}(\omega)+H_{Y_2}{}^*(\omega)H_{Y_1}(\omega)S_{X_2X_1}(\omega)\end{aligned}\right]d\omega \qquad (2.33)$$

入力が共通の場合（＝モーダルアナリシス）

$$\begin{aligned} R_{YY}(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{aligned}&H_{Y_1}{}^2(\omega)+H_{Y_2}{}^2(\omega)\\ &+H_{Y_1}{}^*(\omega)H_{Y_2}(\omega)+H_{Y_2}{}^*(\omega)H_{Y_1}(\omega)\end{aligned}\right]S_{XX}(\omega)d\omega \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_{Y_1}{}^2(\omega)+H_{Y_2}{}^2(\omega)+2\,\mathrm{Re}\left\{H_{Y_1}{}^*(\omega)H_{Y_2}(\omega)\right\}\right]S_{XX}(\omega)d\omega \end{aligned} \qquad (2.34)$$

固有周期f_1とf_2が離れている場合は，図のように非対角項の寄与は小さい。よって， ２乗平均応答は，

$$\begin{aligned} R_{YY}(0)&\approx\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_{Y_1}{}^2(\omega)+H_{Y_2}{}^2(\omega)\right]S_{XX}(\omega)d\omega \\ &=R_{Y_1Y_1}(0)+R_{Y_2Y_2}(0) \end{aligned} \qquad (2.35)$$



標準偏差 $\sigma_Y=\sqrt{R_{YY}(0)}$であらわすと，

$$\sigma_Y=\sqrt{R_{YY}(0)}\approx\sqrt{\sigma_{Y1}^2+\sigma_{Y2}^2+\cdots\sigma_{YN}^2} \qquad (2.36)$$

標準偏差を各モードの最大応答値に置き換えたものが，SRSS（Square Root of Square Sum）である。

コヒーレンス

クロススペクトル密度関数の絶対値を，各成分のパワースペクトル密度関数で基準化したものをコヒーレンスと呼ぶ。

$$Coh_{XY}(\omega)=\frac{\left|S_{XY}(\omega)\right|}{\sqrt{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}} \qquad (2.37)$$

$x(t)$,$y(t)$に無相関な成分が含まれていない場合は１となるが，無相関な成分が含まれていると１以下の値になり， ２つの信号に互いに無相関なノイズ成分がどの程度含まれているかを測る指標となる。

ノイズを含む入出力関係

具体的に，ノイズが含まれる入出力関係のコヒーレンスについて調べてみよう。信号$x(t)$とノイズ$n(t)$からなる波形を考える。

$$\begin{cases} x_I(t) = s_I(t) + n_I(t) \\ x_O(t) = s_O(t) + n_O(t) \end{cases} \tag{2.38}$$

ここでI,Oは入力と出力を表す。$n_I(t)$と$n_O(t)$は互いに無相関なノイズとする。波形と対応するパワースペクトル密度関数とクロススペクトル密度関数を，以下のように表記することにする。

	波形	パワー／クロススペクトル密度関数
観測値	$x_I(t), x_O(t)$	$X_{II}(\omega), X_{OO}(\omega), X_{OI}(\omega)$
信号成分	$s_I(t), s_O(t)$	$S_{II}(\omega), S_{OO}(\omega), S_{OI}(\omega)$
ノイズ	$n_I(t), n_I(t)$	$N_{II}(\omega), N_{OO}(\omega), N_{OI}(\omega)$

入出力関係

インパルス応答$h_{OI}(t)$を用いて，入力の信号成分と出力の信号成分は以下のように関係づけられる。

$$s_O(t) = \underbrace{h_{OI}(t)}_{確定} * s_I(t) \tag{2.39}$$

ここで*はコンボリューションを表す。インパルス応答$h_{OI}(t)$のフーリエ変換は伝達関数$H_{OI}(\omega)$であるから、自己相関関数のフーリエ変換より[(2.31)参照]

$$S_{OO}(\omega) = \underbrace{H_{OI}(\omega) H^*_{OI}(\omega)}_{確定} S_{II}(\omega) \tag{2.40}$$

がえられる。また，入力と出力の信号成分の相互相関関数のフーリエ変換より，次式がえられる。

$$S_{OI}(\omega) = \underbrace{H_{OI}(\omega)}_{確定} S_{II}(\omega) \tag{2.41}$$

ノイズを含む入出力のコヒーレンス

$n_I(t)$と$n_O(t)$ を互いに無相関なノイズとすると，

$$X_{IO}(\omega) = \begin{cases} S_{II}(\omega) + N_{II}(\omega) & I = O \\ S_{IO}(\omega) & I \neq O \end{cases} \tag{2.42}$$

上式は，ノイズも自分自身（I=O）は相関を持ちクロススペクトル＝パワースペクトルは値を持つが，異なるノイズ（I≠O）は相関がないのでクロススペクトルはゼロになることを意味している。

よって，観測される入力波形と出力波形のクロススペクトル密度関数は，次にように書ける。

$$\begin{aligned} X_{OI}(\omega) X^*_{OI}(\omega) &= S_{OI}(\omega) S^*_{OI}(\omega) \\ &= \underbrace{H_{OI}(\omega) H^*_{OI}(\omega) S_{II}(\omega)}_{} S_{II}(\omega) = S_{OO}(\omega) S_{II}(\omega) \end{aligned} \tag{2.43}$$

式(2.40) $S_{OO}(\omega) = H_{OI}(\omega) H^*_{OI}(\omega) S_{II}(\omega)$

ノイズを含む入出力のコヒーレンス

（前頁の結果）

$$X_{OI}(\omega) X^*_{OI}(\omega) = S_{OO}(\omega) S_{II}(\omega) \tag{2.43}$$

よって，ノイズを含む入力波形と出力波形のコヒーレンスは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Coh^2_{OI}(\omega) &= \frac{X_{OI}(\omega) X^*_{OI}(\omega)}{X_{OO}(\omega) X_{II}(\omega)} \\ &= \frac{S_{OO}(\omega) S^*_{II}(\omega)}{\{S_{OO}(\omega) + N_{OO}(\omega)\}\{S_{II}(\omega) + N_{II}(\omega)\}} \le 1 \end{aligned} \tag{2.44}$$

上式は，ノイズ成分が多くなるほどコヒーレンスが1より小さくなることを示している。このことから分かるように，コヒーレンスは入力と出力に含まれるノイズの量を示す指標として有効である。

重要公式

- 自己相関関数を周波数領域に変換したものが，パワースペクトル密度関数
  - ✧ パワースペクトル密度関数をωで積分したものは，波形の２乗平均振幅（分散）に等しい（パーセバルの定理）

$$R_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(t)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega \tag{2.5}$$

- パワースペクトル密度関数は，フーリエ振幅の２乗の期待値を<u>時間Tで割った</u>ものとなる

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} E\left[\left|F_X(\omega)\right|^2\right] \tag{2.21}$$

- 応答スペクトル法のSRSS(Square Root of Square Sum)は，ランダム振動論により導かれる

$$R_{YY}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{Y_1}{}^2(\omega) + H_{Y_2}{}^2(\omega) + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\left\{H_{Y_1}{}^*(\omega) H_{Y_2}(\omega)\right\}}_{\text{固有振動数が離れていれば影響小}}\right] S_{XX}(\omega)\,d\omega \tag{2.32}$$