都市防災工学

後半第１回：導入・確率過程の基礎

千葉大学 大学院工学研究院 都市環境システムコース
岡野 創
http://okano-lab.tu.chiba-u.ac.jp/lecture/index.html

講義予定

1. 導入・確率過程の基礎：2020年11月25日
2. 確率過程の周波数特性と入出力関係：2020年12月2日
3. 時間領域の定常・非定常ランダム応答：2020年12月9日
4. エネルギーバランス：2020年12月16日
5. 最大値分布（ピークファクター）：2020年12月23日
6. ランダムウォークと残留変形：2021年1月6日
7. 断層モデルと地震動のスペクトル特性：2021年1月20日
8. 確率的地震評価（地震危険度解析）：2021年1月27日

本講義で扱う話題

1. ランダム振動論
   - 地震動をランダム波（確率過程）と捉えて，構造物の地震応答を評価する理論
2. 震源モデルによる地震動評価
   - 断層の動きを仮定して，断層から発せられる地震動を評価する方法（運動学的モデル）
3. 確率論的地震動評価（地震危険度解析）
   - 地震発生と（地震が発生したときの）地震動予測の不確定性を考慮した地震動予測の基礎理論

- 評価
  - 出欠（30%）とレポート（70%）
  - 設定したテーマに関してレポートを作成（Moodle提出）

参考書

- ランダム振動
  1. 「耐震構造解析」6章，柴田明徳，森北出版*
  2. Probabilistic Structural Dynamics, Y K Lin ***
  3. 「確率論手法による振動解析」,星谷 勝**
- 地震動（震源モデル）
  4. 「地震の物理」，金森博雄，岩波書店**
  5. 「地震動－その合成と波形処理－」，理論地震動研究会，鹿島出版会**
  6. 「地震学ー定量的アプローチ」，安芸 敬一，古今書院***
- 地震危険度解析
  7. 5.の5章、1の7章（結果のみ）
- 数学公式集
  8. 「数学公式 Ｉ，II」，岩波書店（講義中で引用）

星は難易度：＊→＊＊＊　易 → 難

ランダム振動論（不規則振動論）とは？

- 地震動をランダム（不規則）波として扱い，確率過程として構造物の応答を評価する理論
- ランダム（不規則）波とは？
  - 観測された地震動は？

    調和波のように規則的な性質があるようには見えないが，観測されて既に確定しているのでランダム波とは見なされない
  - 将来の地震動は？

    平均的なスペクトルは予測できるが，波形としては確定的に予測できない場合はランダム波と考えてもよい。
  - 乱数位相を用いて作成した模擬地震波は？

    採用する乱数により模擬波毎に波形は変わるので，模擬波はランダム波のサンプル
  - 常時微動や風

    ランダム波

地震応答解析とランダム応答解析

- 直接積分法により観測地震波や模擬地震波に対する応答解析を行うことは，不規則応答解析とは呼ばない。
- ランダム応答解析では，ランダム波として確率的性質のみが記述された地震動に対して，応答を確率的に評価する。

調和振動の場合

- 調和外力に対する地震応答　（学部の「振動工学」の復習）

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=-m\ddot{y}_0 \qquad \begin{cases} y: \text{地動に対する相対変位} \\ \ddot{y}_0: \text{地動加速度} \end{cases}$$

両辺を m で除して，

$$\ddot{y}+2h\omega\dot{y}+\omega^2 y=-\ddot{y}_0 \qquad \begin{cases} \omega=\sqrt{k/m} \\ h=c/(2m\omega) \end{cases}$$

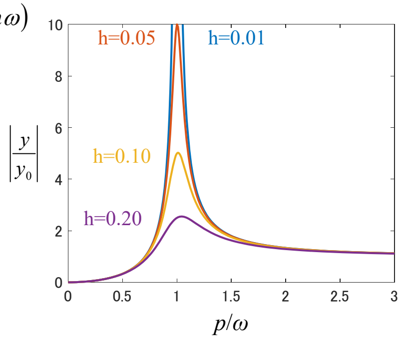
地動を調和地動と $y_0=a_0e^{ipt}$ とし，

その解を $y=Ce^{ipt}$ と置くと，

$$\left|\frac{y}{y_0}\right|=\frac{(p/\omega)^2}{\sqrt{\{1-(p/\omega)^2\}^2+4h^2(p/\omega)^2}}$$

$p=\omega$ では，

$$\left|\frac{y}{y_0}\right|=\frac{1}{2h}$$



地震応答解析

地震応答解析は，一般に直接数値積分法により求める。

n ステップの変位増分は，

$$\{\Delta y\}=\left[\overline{K}\right]^{-1}\left\{\overline{\Delta P}\right\}$$

ここで，

$$\left[\overline{K}\right]=[K(t)]+\frac{1}{2\beta\Delta t}[C]+\frac{1}{\beta\Delta t^2}[M]$$

$$\left\{\overline{\Delta P}\right\}=-[M]\{1\}\Delta\ddot{y}_0+[M]\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{y}_n\}+\frac{1}{2\beta}\{\ddot{y}_n\}\right)+[C]\left(\frac{1}{2\beta}\{\dot{y}_n\}+\left(\frac{1}{4\beta}-1\right)\{\ddot{y}_n\}\Delta t\right)$$

速度，加速度の増分は，

$$\{\Delta\dot{y}\}=\frac{1}{2\beta\Delta t}\{\Delta y\}-\frac{1}{2\beta}\{\dot{y}_n\}-\left(\frac{1}{4\beta}-1\right)\{\ddot{y}_n\}\Delta t$$

$$\{\Delta\ddot{y}\}=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta y\}-\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{y}_n\}-\frac{1}{2\beta}\{\ddot{y}_n\}$$

以上の手続きを繰り返す。

数値解析なので，どんな結果なるかは予想しにくい

地震応答の場合(2)

線形の場合に限れば、フーリエ変換を用いて、以下のような手続きで地震応答を求めることができる。

まず、地動加速度をFFTを用いてフーリエ変換する。

$$\ddot{Y}_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{y}_0(t)e^{-i\omega t}dt$$

振動系の伝達関数を周波数領域で求めて、地動加速度のフーリエ振幅に乗じて、応答のフーリエ振幅を求める。

$$Y(\omega)=H(\omega)\ddot{Y}_0(\omega)$$

FFTを用いた逆フーリエ変換により、応答の時刻歴波形を求める。

$$Y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\ddot{Y}_0(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

この場合も，数値計算になるので，結果が予想しにくい

ランダム振動論の得失

一般の地震応答解析

- 長所：非線形特性の取り扱いに制約がない。
- 短所：応答が数値解としてしか求まらない。そのため，解析結果の妥当性を判断しにくい。

ランダム応答解析

- 長所：地震応答の性質を数式で示したり，理論的な性質を定理として証明することができる
- 長所：線形であれば，応答の期待値を求めることができる。
  - 非線形の場合も，近似的に応答の期待値が求まる場合がある。
- 短所：非線形特性を数式表現する必要があるため，非線形特性の扱いに制約がある

確率過程とは

- 確率過程（random processまたはstochastic process）とは、時間とともに変化する確率変数
  - ある時刻の状態（変数）が確率的に記述される現象と言ってもよい
- 例：ポアソン過程
  - 単位時間の発生確率λが一定（定常到着）
  - t 時間にn 回発生する確率：ポアソン分布

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n\,!}e^{-\lambda t}$$

- 確率過程が適用される分野
  - 経済の動的変動は確率過程として扱われている（動学的確率的一般均衡Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE）
  - 株価などの変動（金融工学）

地震動を確率過程（random process）として扱う

各時刻tの振幅$X(t)$が確率分布として記述される時刻歴は確率過程とみなせる。乱数位相を用いて作成される模擬波は、確率過程の１サンプルと言うことができる。

右図のようなサンプル波の確率密度関数が与えられているとする。

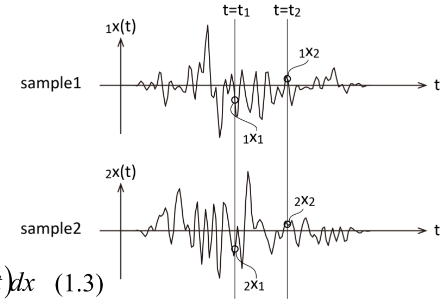
$$f_{\{X\}}(x_1;t_1) \quad (1.1)$$

$$f_{\{X\}}(x_1;t_1,x_2;t_2) \quad (1.2)$$

この確率過程の平均値 μ_X は、

$$\mu_X(t)\equiv \underbrace{\mathrm{E}[x(t)]}_{\text{サンプル方向の期待値}}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)f_{\{X\}}(x;t)dx \quad (1.3)$$

これを　　　　　　　　と呼ぶ。



⋮

確率過程Xのサンプル波の集合（アンサンブル）

自己相関と相互相関関数

自己相関関数（auto-correlation function）

$$\phi_{XX}(t_1,t_2) \equiv \mathrm{E}[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2) f_{\{X\}}(x_1;t_1,x_2;t_2)dx_1dx_2$$

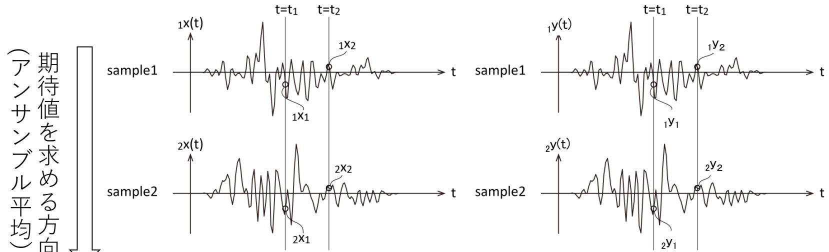
t_1=t_2の場合

$$\varphi_{XX}(t,t) = \mathrm{E}\left[x(t)^2\right]$$

アンサンブル平均

相互相関関数（cross-correlation function）

$$\phi_{X,Y}(t_1,t_2) \equiv \mathrm{E}[x(t_1) \qquad] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \qquad f_{\{X\},\{Y\}}(x_1;t_1,y_2;t_2)dx_1dx_2$$



確率過程X（入力）　　確率過程Y（出力）

定常確率過程（stationary random process）

確率的な特性が原点に依存しない確率過程を、定常確率過程(stationary random process)と呼ぶ。定常確率過程(以下、定常過程と略記)では、原点を任意のcだけ移動しても確率分布は変わらないので、次式が成り立つ。

$$f_{\{X\}}(x_1;t_1) = \qquad (1.4)$$

$$f_{\{X\}}(x_1;t_1,x_2;t_2) = \qquad (1.5)$$

定常過程では、原点t_1に依存しないので、自己相関関数は以下のように書くことができる。

$$\varphi_{XX}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = E\left[x(t_1)x(t_1+\tau)\right] = \qquad (1.6)$$

自己相関関数の性質

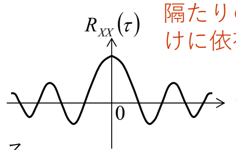
定常過程においては、以下に示すように自己相関関数は偶関数となる。

$$R_{XX}(-\tau) = E\left[X(t)X(t-\tau)\right] = E\left[X(t'+\tau)X(t')\right] = R_{XX}(\tau) \qquad (1.7)$$

隔たりの時間だけに依存する

また、次の性質も成り立つ。

$$|R_{XX}(\tau)| \le |R_{XX}(0)| \qquad \text{直感的には当然} \qquad (1.8)$$



上式が成り立つことは次のように証明できる。

$$\begin{aligned} &E\left[\{a\cdot x(t)+x(t+\tau)\}^2\right] \\ &= a^2E\left[X(t)^2\right] + 2aE\left[X(t)X(t+\tau)\right] + E\left[X(t+\tau)^2\right] \\ &= a^2R_{XX}(0) + 2aR_{XX}(\tau) + R_{XX}(0) \ge 0 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

上式は常にゼロ以上であることから、判別式が負でなければならない。

$$R_{XX}(\tau)^2 - R_{XX}(0)^2 \le 0 \qquad (1.10)$$

相互相関関数の性質(1)

相互相関

$$\phi_{X,Y}(t_1,t_2) \equiv \mathrm{E}[x(t_1)y(t_2)]$$

定常過程では、

$$R_{X,Y}(\tau) \equiv \mathrm{E}[x(t)y(t+\tau)] \qquad (1.11)$$

X,Yを入れ替えると,

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(\tau) &= \mathrm{E}[x(t)y(t+\tau)] \\ &= E[x(t'-\tau)y(t')] = R_{Y,X}X(-\tau) \end{aligned} \qquad (1.12)$$

相互相関関数の性質(2)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\{a\cdot x(t)+y(t+\tau)\}^2\right] \\
&= a^2E\left[x(t)^2\right]+2a\cdot E\left[x(t)y(t+\tau)\right]+E\left[y(t+\tau)^2\right] \qquad (1.13)\\
&= a^2R_{XX}(0)+2a\cdot R_{XY}(\tau)+R_{YY}(0)\geq 0
\end{aligned}
$$

この期待値は常に0以上であることから、判別式は負でならなければならない。

$$R_{XY}(\tau)^2-R_{XX}(0)R_{YY}(0)\leq 0 \qquad (1.14)$$

この期待値は常に0以上となるので、判別式は負より、

$$(0\leq)\frac{R_{XY}(\tau)^2}{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}\leq 1 \quad \longrightarrow \quad (0\leq)\frac{|R_{XY}(\tau)|}{\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}}\leq 1 \qquad (1.15)$$

$R_{XX}(0)>0, R_{YY}(0)>0$ を考慮すると，右側の式のように書いても良い。

式(1.15)は、例えばXが入力、Yが出力とすると、入出力の自己相関で基準化した相互相関の絶対値は1より小さくなることを表している。

エルゴード過程（ergodic process）

定常確率過程において、アンサンブル確率密度関数と、１サンプル波形の時間的確率密度関数が同一となるものをエルゴード過程と呼ぶ。

アンサンブル平均を$E[\ ]$、時間軸方向の平均を< >で表すと、確率過程のエルゴード性は次のように表せる。

アンサンブル平均＝時間平均

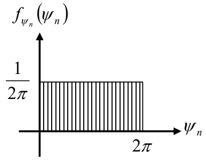
$$E[x(t)]=\langle x(t)\rangle \qquad (1.16)$$

エルゴード性は、検証が難しいので<u>多くの場合は単なる仮定</u>であるが、便利なので数式の誘導にしばしば用いられる。

具体例に確率過程の性質を調べてみよう

乱数位相を持つフーリエ級数

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N}\underbrace{a_n}_{確定}\cos(\underbrace{\omega_n}_{確定}t+\underbrace{\psi_n}_{一様乱数})$$



このフーリエ級数は確率変数を含んでいるので、確率過程である。この確率過程の性質を調べてみよう。

三角関数の加法定理より，振幅の平均（1次モーメント※）は,

$$E[x(t)]=a_n\sum_{n=1}^{N}\left(\cos\omega_n t\cdot E[\cos\psi_n]-\sin\omega_n t\cdot E[\sin\psi_n]\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
E[\cos\psi_n]&=\int_0^{2\pi}\cos\psi_n\cdot\underbrace{1/2\pi}_{確率密度}\ d\psi_n=1/2\pi\left[\sin\psi_n\right]_0^{2\pi}=0\\
E[\sin\psi_n]&=\int_0^{2\pi}\sin\psi_n\cdot 1/2\pi\ d\psi_n=1/2\pi\left[\cos\psi_n\right]_0^{2\pi}=0
\end{aligned}\right\}\ E[x(t)]=0$$

※ n次モーメント $\int x^n f_X(x)dx$

自己相関関数(1)

$$E[x(t)x(t+\tau)]=E\left[\sum_{m=1}^{N}a_m\cos(\omega_m t+\psi_m)\times\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(\omega_n(t+\tau)+\psi_n)\right]$$

加法定理で展開すると,

$$E[x(t)x(t+\tau)]=E\left[\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{N}a_m(\cos\omega_m t\cos\psi_m-\sin\omega_m t\sin\psi_m)\\&\times\sum_{n=1}^{N}a_n(\cos\omega_n(t+\tau)\cos\psi_n-\sin\omega_n(t+\tau)\sin\psi_n)\end{aligned}\right]$$

※ 下線部がアンサンブル平均の対象

$m\neq n$ の場合（以下、しばらくアンサンブル平均のみ）

$$E[\cos\psi_m\cos\psi_n]=E[\cos\psi_m]E[\cos\psi_n]=0$$
$$E[\sin\psi_m\sin\psi_n]=E[\sin\psi_m]E[\sin\psi_n]=0$$
$$E[\cos\psi_m\sin\psi_n]=E[\cos\psi_m]E[\sin\psi_n]=0$$

ψ_mとψ_nは独立なので個別に期待値を取ってよい

自己相関（2）

m=nの場合

$$E[\cos\psi_m \sin\psi_m] = E\left[\frac{1}{2}\sin 2\psi_m\right] = 0$$

$2\psi_m$は0~4πに一様に分布する

$$E[\cos^2\psi_m] = \int_0^{2\pi}\cos^2\psi_m \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{確率密度}} d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos 2\psi_m + 1)d\psi = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2\psi_m + t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$E[\sin^2\psi_m] = \int_0^{2\pi}\sin^2\psi_m \cdot \frac{1}{2\pi}d\psi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\psi_m)d\psi = \frac{1}{2}$$

自己相関（3）

以上をまとめると、m=nの同種の三角関数の積のみが残り、

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \frac{1}{2}\left(\cos\omega_n t\cos\omega_n(t+\tau) + \sin\omega_n t\sin\omega_n(t+\tau)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \frac{1}{2}\cos\omega_n\tau$$

加法定理

となり、時間差τのみの関数となり原点に依存しないことから、定常過程であることが分かる。

時間軸方向の期待値を考えてみる

エルゴード性を持つかどうか調べてみる

振幅の時間平均

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a_n\sum_{n=1}^{N}\cos(\omega_n t + \psi_n)dt$$

$\langle\ \rangle$ は時間平均を表す

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\underbrace{\left[\sum_{n=1}^{N}\sin(\omega_n t + \psi_n)\right]_{-T}^{T}}_{T\text{に比例する項を含まない}} = 0$$

時間軸で平均した自己相関(1)

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{m=1}^{N}a_m\cos(\omega_m t + \psi_m)\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(\omega_n(t+\tau)+\psi_n)\right)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}a_m(\cos\omega_m t\cos\psi_m - \sin\omega_m t\sin\psi_m) \\ \displaystyle\times\sum_{n=1}^{N}a_n(\cos\omega_n t\cos(\omega_n\tau+\psi_n) - \sin\omega_n t\sin(\omega_n\tau+\psi_n))\end{array}\right)dt$$

$m \neq n$ の場合

tに関する積分なので○で囲った項のみ取り出す

$$\int_{-T}^{T}\cos\omega_m t\cos\omega_n t\,dt = 0$$

$$\int_{-T}^{T}\sin\omega_m t\sin\omega_n t\,dt = 0$$

$$\int_{-T}^{T}\cos\omega_m t\sin\omega_n t\,dt = 0$$

時間軸で平均した自己相関（2）

$m=n$ の場合

$$\int_{-T}^{T}\cos^2\omega_n t\,dt=\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}(\cos 2\omega_n t+1)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n t+t\right]_{-T}^{T}=\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n T+T$$

$$\int_{-T}^{T}\sin^2\omega_n t\,dt=\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega_n t)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n t\right]_{-T}^{T}=-\frac{1}{2\omega_n}\sin 2\omega_n T+T$$

$$\int_{-T}^{T}\cos\omega_n t\sin\omega_n t\,dt=\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\sin 2\omega_n t\,dt=\left[-\frac{1}{4\omega_n}\cos 2\omega_n\right]_{-T}^{T}=0$$

T比例の項のみ残る

以上より

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{2T}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^2(\cos\psi_n\cos(\omega_n\tau+\psi_n)+\sin\psi_n\sin(\omega_n\tau+\psi_n))\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_n^2\cos\omega_n\tau$$

アンサンブル平均に等しい ⇨ エルゴード過程

まとめ

- 今回の講義のキーワード
  - ランダム振動論
  - 確率過程
  - 定常過程
  - アンサンブル平均
  - エルゴード性
  - 自己相関
  - 相互相関